

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران جنوب
دانشکده فنی - گروه مکانیک

پایان نامه دوره کارشناسی ناپیوسته

موضوع:

بررسی و مقایسه روشهای تحلیلی و تجربی ضربه عرضی بر روی

صفحات کامپوزیتی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا خلیلی

دانشجویان:

محسن روحانی رصاف

8213340124

اسماعیل امیری

8213340090

سال تحصیلی : 85-1384

فهرست مطالب

عنوان صفحه

1 پیش گفتار

- 1-1 مقدمه..... 4
1-2 کارهای انجام شده در این پروژه..... 18

2 تئوریهای صفحه

- 2-1 تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)..... 21
2-2 تئوری کلاسیک صفحه (CPT)..... 31
2-3 ارائه یک تئوری جدید..... 33
2-4 بررسی ضربه در چهار چوب تئوری ورق ارائه شده
در بخش 2-3..... 51
2-5 تئوری صفحه مرتبه بالاتر (HOPT)..... 62
2-6 انتشار امواج هارمونیک..... 73
2-7 ارتعاشات آزاد صفحه..... 79

3 مدل‌های ضربه

- 3-1 مدل جرم-فنر..... 81
3-2 مدل بالانس-انرژی..... 84
3-3 واکنش تیر برنولی در برابر ضربه..... 89
3-4 ضربه روی صفحه باتکیه گاه ساده براساس تئوری
کلاسیک صفحه..... 94

- 3-5 ضربه روی صفحه با تکیه گاه ساده براساس تئوری تغییر
شکل برشی مرتبه اول.....95
- 3-6 جواب تقریبی برای ضربه بامواج کنترل شده.....99
- 3-7 تئوری پوسته..... 110
- 3-8 اندازه گیری 115
- 4 خسارت ضربه با سرعت کم (DAMGE)**
- 4-1 تستهای ضربه..... 120
- 4-2 انواع مدل در ضربه با تغییر شکل دائمی با سرعت کم.....126
- 4-3 روشهای تجربی برای تخمین خسارت.. 132
- 5 نتیجه گیری..... 135**

فصل اول پیش‌گفتار

1-1 مقدمه

ورق کامپوزیت لایه‌ای

ماده کامپوزیت لایه‌ای، شامل لایه‌هایی از حداقل دو ماده متفاوت است که توسط باندهایی به هم متصل شده‌اند. نتیجه روی هم قرار گرفتن لایه‌ها به منظور ترکیب بهترین خواص تک تک آنها برای ایجاد ماده جدیدی است یا موارد استفاده بیشتر. خواصی که توسط روی هم چیدن لایه‌ها تقویت می‌شوند عبارتند از: استحکام - سفتی وزن کم، مقاومت در برابر ضربه و غیره. لایه‌ها می‌توانند غیر ایزوتروپ باشند. و نیز لایه‌ها را می‌توان به نحوی انتخاب نمود که سفتی و مقاومت موردنیاز در طراحی یک سازه حاصل شود.

ماده کامپوزیت تقویت شده با الیافی (Fiber-reinforced composite material) که مختصراً (FRCM) نامیده می‌شود، شامل الیاف‌هایی در یک ماتریس می‌باشد. اگر الیاف‌ها در یک راستای خاص قرار گیرند، ماده غیر ایزوتروپ خواهد بود، یک ورق کامپوزیت لایه‌ای شامل لایه‌هایی از FRCM است که در هر لایه، الیاف‌ها در راستایی متفاوت از راستای الیاف‌ها در سایر لایه‌ها چیده شده‌اند. این نوع کامپوزیت‌های لایه‌ای می‌توانند به نحوی طراحی شوند تا از نسبت‌های مقاومت به وزن و سختی به وزن بالایی برخوردار باشند. و نیز طراحی می‌تواند به گونه‌ای باشد که ورق لایه‌ای دارای جهات برتری از مقاومت و سختی تقویت شده باشد. و به این دلایل FRCM، جایگزین مناسبی است به جای مواد سفتی نظیر

انواع فلزات در خیلی از کاربردها مانند صنایع هوایی، خودروسازی و تجهیزات ورزشی.

ضربه به ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای:

در بعضی کاربردها، ورق‌های لایه‌ای ساخته شده از FRCM، تحت بار ضربه قرار می‌گیرند. به عنوان مثال لبه جلویی بال هواپیما یا پره یک موتور جت ممکن است به یک شیء خارجی مانند سنگ یا پرنده برخورد نماید. بار ضربه می‌تواند حتی در حین ساخت و یا تعمیر نیز پیش آید و نیروی ضربه به این مواد باعث بوجود آمدن خرابی‌های داخلی که با چشم غیرمسلح قابل رؤیت نیست شود که این امر در نهایت باعث تضعیف مقاومت و پایداری سازه خواهد شد. بنابراین مقاومت ورق‌های لایه‌ای در برابر ضربه باید شناخته شده باشد تا بتوان ورق‌هایی طراحی کرد که مناسب برای عملکرد مطمئن و امن در برابر ضربه باشند. دینامیک ضربه، شامل حرکت جسم ضربه زننده، ماده هدف و نیروی حاصل از ضربه بین این دو، می‌تواند به وسیله مدل‌های گوناگون و با روش‌های متفاوت بررسی شود.

در بخش بعدی مروری خواهید داشت بر مطالعات انجام شده توسط دیگر محققان در مورد ضربه به ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای،

مروری بر بررسی‌های انجام شده روی ضربه به ورق‌های کامپوزیتی

Hertz نشان داده که با فشار استاتیکی دو جسم کروی شکل ایزوتروپ بر روی

هم، تماس بر روی یک ناحیه دایره‌ای شکل صورت می‌گیرد به نحوی که توزیع فشار نرمال در این منطقه تماس به صورت توزیع هرتزین می‌باشد [1]. [1] Timoshenko روابطی بین شعاع دایره تماس، فرورفتگی و نیروی نرمال را ارائه نمود که در آن ارتباط بین نیرو و فرورفتگی به صورت یک رابطه غیرخطی محاسبه شده که به قانون تماس هرتز موسوم است. Timoshenko همچنین برخورد دو گلوله به هم را مورد بررسی قرار داده است.

cattopadhyay fusn [2] پاسخ ورق‌های غیرایزوتروپ و تحت تنش اولیه را به ضربه یک گلوله در وسط ورق در قالب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار داده و نیز ضربه و خیز ورق را توسط حل کردن یک معادله انتگرالی غیرخطی مشابه به معادله‌ای که در بررسی ضربه روی تیرها ظاهر می‌شود به دست آورده و نیز انرژی منتقل شده از جرم به ورق را در زمان ضربه، محاسبه کرده‌اند. این دو گزارش نموده‌اند که نقش کششی اولیه بیشتر باعث افزایش ماکزیمم نیروی تماس می‌شود ولی زمان ضربه، خیز ورق و تنش‌ها و انرژی منتقل شده از جرم به ورق در اثر تنش کششی اولیه بیشتر کاهش می‌یابد.

Sqian&swanson [3] روش‌های مختلفی را دریافتن پاسخ ورق‌های کامپوزیت به ضربه یک گلوله مورد بررسی قرار داده‌اند. یکی از تکنیک‌های مورد بررسی آنان بر پایه استفاده از روش ریلی - ریتز همراه با انتگرال‌گیری عددی در زمان بوده و روش دیگر استفاده از تبدیل لاپلاس بر روی معادلات دیفرانسیل حاکم بر ورق و خطی‌سازی تغییر شکل محل برخورد می‌باشد. آنان نتایج خود را با نتایج

حاصل از آنالیز توسط المان محدود و آزمایشات تجربی مقایسه نموده‌اند که نتایج ارائه شده توسط این دو محقق نشان دهنده محدودۀ پارامترهای عددی برای ایجاد یک جواب خوب و دقیق می‌باشد.

swanson & chnistoforon [4] مسئله ضربه را به صورت تحلیل مورد بررسی قرار داده‌اند، روش آنان بر پایه استفاده از سری‌های فوریه برای ورق‌ها بر روی تکیه‌گاه‌های ساده، همراه با استفاده از تبدیل لاپلاس قرار دارد. این دو پژوهشگر نیروی ضربه، جابجایی ورق و تنش کشش نرمال در وسط ورق را به دست آورده‌اند و در تحقیقاتشان، رابطه بین نیرو و فرورفتگی به صورت خطی در نظر گرفته شده است در صورتی که واقعاً این رابطه غیرخطی می‌باشد. دلیل استفاده ایشان از رابطه خطی این بوده است که معادله انتگرالی غیرخطی را که در مسئله ضربه برای حل نیرو با آن مواجه شده‌اند خطی نموده و به صورت تحلیلی حل نمایند. و همچنین سطح تماس را به صورت یک مربع ثابت و توزیع تنش را در این مربع، یکنواخت در نظر گرفته‌اند که البته این ساده سازی‌ها به علت کوچکی سطح تماس توجیه‌پذیر است.

sun & cheh [5] رفتار یک ورق حاوی تنش اولیه تحت بار ضربه را مورد مطالعه قرار داده‌اند. اینان در بررسی خود از روش المان محدود استفاده کرده‌اند و قانون تماس از آزمایشات تجربی به دست آورده و در برنامه المان محدود خود به کار برده‌اند. آنان با تحلیل نتایج عددی حاصله، حاوی نیروی تماس، جابجایی و کرنش‌های در صفحه، گزارش نموده‌اند که تنش اولیه کششی باعث افزایش نیروی

تماس و کاهش زمان ضربه می‌شود و عکس آن نیز برای تنش اولیه فشاری صادق است. همچنین پاسخ ضربه، تقریباً نسبت مستقیم با سرعت گلوله دارد. گلوله‌های سنگین‌تر، نه تنها نیروی تماس را زیادتر می‌کنند، بلکه زمان تماس را افزایش می‌دهند. جابجایی ورق نیز به وسیله ضربه گلوله‌های سنگین‌تر بیشتر می‌شود و بالاخره، پاسخ به ضربه، نسبت به ابعاد گلوله حساس نمی‌باشد.

Mittal [6]، ورق‌های تحت بار ضربه را مورد مطالعه قرار داده است وی اثرات تغییر شکل در رابطه با برش عرضی را که ورق‌های ضخیم غیرقابل صرف‌نظر کردن می‌شد، در نظر گرفته و جواب‌های بسته، با استفاده از یک تقویت نه چندان مهم، برای جابجایی و ممان خمشی در نقطه ضربه به دست آورده است. این جواب‌ها، مستقل از شرایط مرزی در لحظات اولیه پدیده ضربه می‌باشند و این بدان معنی است که وی در بررسی خود، ابعاد ورق را بی‌نهایت در نظر گرفته و از تبدیلات نامحدود فوریه استفاده نموده است، همچنین با استفاده از قانون تماس هرتز، نیروی ضربه را در طول زمان ضربه مورد محاسبه قرار داد. و گزارش نموده است که اثر برش بر روی جابجایی، کمتر از اثر آن بر روی نیروی ضربه و همان خمش می‌باشد.

Greszczuk [7] پاسخ مواد ایزوتروپ و کامپوزیت را به ضربه گلوله‌ها مورد مطالعه قرار داده است. تحقیق وی به منظور مطالعه پیرامون مکانیزم خرابی در مواد ایزوتروپ و کامپوزیت که تحت اثر بار ضربه قرار می‌گیرند، می‌باشد و موارد زیر را شامل است:

1- مشخص کردن توزیع فشار متغیر با زمان در محل نقطه برخورد.

2- مشخص کردن تنش‌های داخلی حاصل از این توزیع فشار در هدف.

3- مشخص کردن مددها شکست حاصل از این تنش‌های داخلی در هدف.

در تحقیقات Greszczuzuk، توزیع فشار در زیر یک گلوله ضربه زن، به وسیله ترکیب حل دینامیکی مسئله ضربه اجسام با حل استاتیکی برای توزیع فشار بین دو جسم در تماس، مشخص شده است و با داشتن فشار سطحی متغیر با زمان، آنالیز استاتیکی برای به دست آوردن تنش‌های وابسته به زمان، در هدف مورد استفاده قرار گرفته است. و نیز تنش‌های داخل در هدف تشکیل شده از مواد کامپوزیت و ایزوتوپ نسبت به خواص هدف و گلوله، سرعت ضربه و شکل گلوله بررسی شده و از آن برای مشخص کردن سرعت حدی شکست استفاده شده است. در این پژوهش همچنین، منحنی‌هایی برای نشان دادن ارتباط بین خواص ماده، هدف و سرعت حدی برای شروع تخریب ارائه شده است.

lagace & carins [8]، ورق‌های کامپوزیت ضخیم تحت اثر بار ضربه جانبی را مورد بررسی قرار داده و یک حل تحلیلی برای ورق ایزوتروپ ارائه نموده‌اند. در روش حل از یک تابع تنش برای بدست آوردن تنش‌ها و کرنش‌های حاصل از بارگذاری به وسیله یک کره صلب، استفاده شده است. نامبردگان نتایج را به صورت نمودارهایی از نیرو در مقابل فرورفتگی موضعی که می‌تواند همراه با تئوری شکست، شروع شکست را در موضع ضربه پیش‌بینی کند، نشان داده‌اند مدل به کار رفته در این تحقیق در برگیرنده تمام هندسه‌ها و خواص غیرخطی مواد که در حین

تغییر شکل‌ها و بارهای بزرگ دیده می‌شوند نیست ولی می‌تواند اطلاعات خوبی برای پیش‌بینی مرز شکست ارائه دهند.

lee & Reismann [9] پاسخ دینامیکی یک ورق مستطیل شکل را در چهارچوب یک تئوری ورق که اثرات اینرسی دوران و تغییر شکل برش را در نظر می‌گیرد، بررسی کرده‌اند. این تئوری در واقع توسط Mindlin [10] به دست آمده است. در تحقیق این دو پژوهشگر، یک جواب عمومی برای حرکت آزاد و اجباری ورق مستطیلی شکل در چهارچوب تئوری Mindlin ارائه شده است. همچنین پاسخ یک ورق مستطیلی تحت اثر ناگهانی توزیع فشار سطحی یکنواخت بررسی گردیده است و نتایج بدست آمده با تئوری کلاسیک ورق برای ارتعاش آزاد و اجباری مقایسه شده است. این دو در تحقیق خود از آنالیز مودال برای بررسی ارتعاشات اجباری استفاده نموده‌اند. به این ترتیب که ابتدا ارتعاش آزاد را بررسی نموده و فرکانس‌های ارتعاش و شکل مدها را بدست آورده و سپس با استفاده از یک رابطه تعامد مودها، پاسخ ارتعاش اجباری را به صورت ترکیبی از پاسخ ارتعاش آزاد، در نظر گرفته و مسئله حل و گزارش نموده‌اند که با افزایش ضخامت ورق، تفاوت بین پاسخ‌های یافته شده توسط تئوری کلاسیک و تئوری Mindlin زیاد می‌شود. البته در این تحقیق، اندازه فشار سطحی یکنواخت و دانسته فرض شده است و این فشار را توسط یک تابع Heaviside در معادلات اعمال نموده‌اند.

Dobyns [11]، ورق‌های ارتوتروپ بر روی تکیه‌های ساده را تحت بار استاتیکی و دینامیکی مورد مطالعه قرار داده است. در این تحقیق از معادلات ورق که توسط

pagano & whitney به دست آمده و حاوی اثرات تغییر شکل برشی می‌باشند، استفاده شده است. بارگذاری‌های متغیر با زمان که در این تحقیق بررسی شده‌اند شامل بارهای پالسی سینوسی، مستطیل و مثلثی می‌باشند. این پالس‌ها به صورت بار یکنواخت بر روی ورق، بار نقطه‌ای و یا بار یکنواختی بر روی یک مساحت مستطیل کوچک و بار کسینوسی بر روی یک مساحت مستطیلی شکل در نظر گرفته شده‌اند، وی در بررسی‌های خود از روش آنالیز مودال برای یافتن پاسخ ارتعاشات اجباری استفاده نموده است.

saxena & chatto pedhyay [13] اثرات ترکیبی تغییر شکل برشی و فرو رفتگی دائمی را بر روی پاسخ ورق‌های به بار ضربه، بررسی نموده‌اند. آنان از تئوری Mindlin استفاده و از اثرات اینرسی دورانی صرف‌نظر نموده‌اند. در نتایج ارائه شده، پاسخ‌های تئوری کلاسیک، تئوری midlin، تئوری کلاسیک با فرورفتگی دائمی و تئوری midline با فرورفتگی دائمی، با هم مقایسه شده‌اند. آنچه که مشخص است این است که نیروی تماسی و جابجایی ورق، با در نظر گرفتن فرورفتگی دائمی، نسبت به فرورفتگی الاستیک کاهش می‌یابند.

sankar & sun [14] در بررسی ضربه عرضی، از روش جالبی برای حل یک معادله انتگرالی غیرخطی که همواره در بررسی مسائل ضربه به وجود می‌آید استفاده نموده‌اند. آنان در حل این معادله انتگرالی که تعیین کننده پروفیل نیرو است، زمان را به Δt های کوچک تقسیم کرد. و در هر Δt ، تغییرات نیرو را به صورت خطی در نظر گرفته‌اند. سپس با این تابع تقریبی، معادله انتگرالی را حل

نموده‌اند. نتیجه کار این پژوهشگر، تعیین پروفیل نیرو برای مسئله ضربه بر روی تیر می‌باشد. همچنین اثرات تقسیم‌بندی روی زمان را نیز بررسی و به صورت نمودارهایی نشان داده‌اند.

Greene & Reismann [15] ورق‌های دایره‌ای شکل، تحت بار با تقارن محوری، بر روی سطحشان را بررسی نموده‌اند. بار روی ورق، می‌تواند به نحو دلخواه توزیع و وابسته به زمان باشد. شرایط مرزی بررسی شده یک مجموعه کامل اثرات تغییر شکل برشی و لختی دورانی است، به دست آمده است. در روش حل از یک روش مود نرمال استفاده شده که در آن جواب دینامیکی به صورت یک بسط تابع ویژه، حول جواب استاتیکی نشان داده شده است و پاسخ یک ورق که از اطراف گیره شده و تحت اثر ناگهانی یک بار جانبی که به صورت یکنواخت بر روی مساحت دایره‌ای توزیع شده، به دست آمده است.

choi & chang [16] تخریب حاصل از ضربه به ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای گرافیت / اپوکسی را که به وسیله برخورد یک جسم خارجی با سرعت کم بوجود می‌آید بررسی نموده و مدلی برای پیش‌بینی شروع و پیشرفت شکست به صورت تابعی از خواص مواد، ترتیب، چیدن لایه‌ها و جرم جسم ضربه زننده را به دست آورده‌اند این مدل شامل آنالیز تنش و آنالیز شکست بوده و از روش المان محدود بر مبنای تئوری الاستیسیته خطی سه بعدی، برای محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها در ورق کامپوزیت استفاده شده است.

Amateau & harasek & strait [19]، اثر غوطه‌وری در آب دریا را روی

مقاومت مواد کامپوزیت در برابر ضربه به مورد مطالعه قرار داده‌اند ماده کامپوزیت به کار رفته در آزمایشات از نوع شیشه / اپوکسی می‌باشد.

[20] Jun & kim ورق‌های ساندویچی کامپوزیت ساخته شده از وجوه گرافیت / اپوکسی و هسته‌های لانه زنبوری از جنس Nomex را تحت بار ضربه مورد مطالعه قرار داده‌اند و اندازه و شکل جدا شدن لایه‌ها از هم را تحت بار ضربه به صورت تجربی اندازه‌گیری نموده‌اند.

[21] simmods & Names ورق‌های ساندویچی کامپوزیت ساخته شده از وجوه فایبرگلاس/اپوکس و هسته فم را تحت بار ضربه، از طریق ترکیب روش‌های محاسباتی و آزمایشگاهی بررسی نموده و نتایج حاصل برای پروفیل نیرو بر حسب زمان را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کرده‌اند همچنین سختی ورق قبل و بعد از برخورد را با هم مقایسه نموده‌اند تا اثر شکست بر روی رفتار آینده ورق مشخص شود.

[22] larve & Boghanovich ضربه یک جسم صلب به ورق کامپوزیت لایه‌ای مستطیلی شکل را مورد بررسی قرار داده و جابجایی‌ها، تغییر شکل‌ها و تنش‌ها را محاسبه کرده‌اند. ورق‌های مورد بررسی این دو محقق از جنس گرافیت / اپوکسی و چسب پلیمری / *sorganic glas* بوده و تئوری استفاده شده، تئوری لایه‌ای می‌باشد. نتایج نیروی تماس برای اندازه‌های متفاوت جرم و سرعت یک گلوله در انرژی ضربه معین ارائه شده. و آنالیز ناحیه شکست حاصل از ضربه در ورق ارتوتروپ سه لایه و پنج لایه گرافیت / اپوکسی برای ضربه با انرژی 2-2/5 ژول و

ترکیبات سرعت و جرم متفاوت انجام شده.

chang of wang & choi [23] اثر ترتیب چیدن لایه‌ها، ضخامت و جرم جسم ضربه زننده را بر روی تخریب حاصل از ضربه با سرعت کم در ورق‌های لایه‌ای گرافیت / اپوکسی بررسی نموده‌اند.

Fann & Hung & lee [24] ورق‌های ساندویچی کامپوزیت را تحت بار ضربه مطالعه نموده‌اند. این سه محقق، ورق ساندویچی را توسط دو ورق mindlin جداگانه مدل نموده‌اند و فرض کرده‌اند که در هسته برش عرضی و سختی نرمال وجود داشته است. این مدل اجازه بررسی تغییر شکل نسبی دو وجه، تحت بار متمرکز را می‌دهد.

اهمیت این نکته از آن رو است که وجه تحت بار عرضی رفتاری متفاوت از وجه دیگر دارد. این دو از روش المان محدود برای تحلیل ضربه به روی ورق ساندویچی ساخته شده از وجوه گرافیک / اپوکسی و هسته صلب فم مقایسه کرده و گزارش نموده‌اند که مدل به کار رفته می‌تواند رفتار دینامیکی ورق ساندویچی کامپوزیت را نسبت به ضربه با سرعت کم به نحو مطلوب توضیح دهد. این پژوهشگران همچنین اثر سرعت و جرم جسم ضربه زننده را بررسی نموده‌اند.

shyu & wu [25] ورق‌های کامپوزیت تحت بار ضربه کره‌های صلب با سرعت کم را بررسی و گزارش نموده‌اند، که پدیده تماس در مورد فرورفتگی‌های کوچک و بزرگ متفاوت می‌باشد. و این به دلیل ایجاد چیدن لایه‌های دارای اثر جزئی بر روی رابطه نیرو و فرورفتگی می‌باشد. و بعد از مرحله فرورفتگی اولیه، تخریب اتفاق

می‌افتد و نیز اندازه ناحیه ورقه ورقه شدن لایه‌ها متناسب با بار اعمالی و تعداد سیکل‌های بارگذاری می‌باشد.

yen & wu [26] توسط روشی که از تئوری الاستیسیته غیر ایزوتروپیک سه بعدی استخراج شده، تماس بین یک ورق لایه‌ای کامپوزیت و یک کره صلب را بررسی نموده و پاسخ ورق و رابطه بین نیرو و فرورفتگی را به دست آورده‌اند. و رابطه عالی بین نتایج تئوری و اطلاعات آزمایشگاهی را گزارش نموده‌اند. این دو بیان نموده‌اند که رابطه نیرو و فرورفتگی تقریباً متناسب با مدول یانگ خارج از صفحه می‌باشد و توسط ضخامت ورق تحت تأثیر قرار می‌گیرد و اثر تغییرات مدول‌های یانگ در صفحه، مدول‌های برشی و ترتیب چیدن لایه‌ها در فرورفتگی‌های کوچک مهم نمی‌باشد. این دو محقق، بررسی خود را بر روی ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای ساخته شده از لایه‌های ارتوتروپ قرار داده‌اند.

معرفی چند تئوری ورق:

دو تئوری ورق که به صورت گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از تئوری کلاسیک ورق و تئوری تغییر شکل برش مرتبه اول. در تئوری کلاسیک ورق فرض بر این است که جابجایی در راستای عمود بر سطح ورق و در ضخامت ورق ثابت می‌باشد و خطوط عمود بر سطح میانی ورق بعد از اعمال بار، همچنان به صورت خطوط عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند. ولی در فرض اولیه تئوری تغییر شکل برش مرتبه اول گرچه جابجایی در راستای عمود بر سطح ورق در ضخامت ورق

ثابت است و خطوط عمود بر سطح میانی ورق بعد از اعمال بار، همچنان به صورت خطی باقی می‌ماند اما لزوماً بر سطح میانی عمود نمی‌باشد. در این دو تئوری ورق فرض اولیه بر روی جابجایی‌ها است. نوع موادی که ورق از آن‌ها ساخته شده است و یا اینکه ورق ایزوتروپ است یا یک ورق کامپوزیت و اگر کامپوزیت است از چند لایه و با چه مشخصاتی تشکیل شده، در فرض اولیه بر روی جابجایی‌ها مطرح نمی‌باشد.

معادلات حرکت ورق، در حالت کلی با استفاده از روابط سه بعدی الاستیسته خطی یا با استفاده از اصل هامیلتون به دست می‌آیند و بسته به این که ورق ایزوتروپ است یا کامپوزیت می‌توان معادلات حرکت را بر حسب ضرایب موجود در روابط بین مؤلفه‌های تنش و کرنش مواد به کار رفته در ورق بازنویسی و ساده نمود. نمونه این امر در مورد تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در بخش مربوطه توضیح داده شده که چگونه معادلات حرکت برای ورق کامپوزیت لایه‌ای ساخته شده از لایه‌های ارتوتروپ تحت این تئوری به دست آمده‌اند. برخلاف تئوری کلاسیک ورق که تنش‌های برش عرضی صفر فرض می‌شوند، در تئوری تغییر شکل برش مرتبه اول، این تنش‌ها در ضخامت ورق مقدار ثابتی است و در هر دو تئوری کرنش عرضی نرمال و تنش عرضی نرمال صفر فرض می‌شود.

این فرضیات، تناقض‌هایی را بوجود می‌آورد به عنوان مثال ورق تحت توزیع تنش نرمال بر روی سطح بالایی آن، تنش‌های برش عرضی نه مطابق تئوری کلاسیک صفر می‌باشد و نه مطابق تئوری تغییر شکل برش مرتبه اول، در راستای عمود بر

سطح ورق و در ضخامت ورق ثابت می‌باشد. و واقعیت از این قرار است که تنش‌های ذکر شده در سطوح آزاد بالا و پایین ورق صفر است ولی در ضخامت ورق مقدار آن غیر صفر می‌باشد. این واقعیت منجر به استفاده از ضرایبی به نام ضرایب تصحیح تنش برشی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌گردد تناقض دیگر این است که تنش عرضی نرمال صفر فرض می‌شود و حال آن که در سطح بالایی ورق مثال یاد شده توزیع نقش عرضی نرمال مقدار غیر صفر مشخصی است.

با وجود تناقضات یاد شده دو تئوری مذکور از جانب محققان در بررسی ورق‌ها استفاده قرار گرفته است. تئوری لایه‌ای ورق [22]، تئوری دیگری است که در آن، فرضیه اولیه بر روی جابجایی‌ها می‌باشد. در این تئوری فرض بر این است که تغییرات مؤلفه‌های جابجایی در هر لایه فیزیکی یا ریاضی در راستای عمود بر سطح ورق و در ضخامت ورق به صورت یک تابع چند جمله‌ای است. ذکر کلمه لایه نباید بوجود آورنده این فکر باشد که این تئوری مختص ورق‌های لایه‌ای است. لایه ریاضی یعنی لایه فرضی دلخواه، به این ترتیب می‌توان یک ورق ایزوتروپ را به تعدادی لایه ریاضی ایزوتروپ و یا لایه‌های فیزیکی ورق‌های کامپوزیت را به تعداد لایه ریاضی تقسیم نمود. در هریک از این لایه‌ها، تغییرات مؤلفه‌های جابجایی در راستای عمود بر سطح ورق در ضخامت ورق به صورت تابع چند جمله‌ای است. انتخاب شکل این تابع می‌تواند بیان کننده تغییرات خطی یا مراتب بالاتر در مورد جابجایی‌ها باشد. در این تئوری که تنش عرضی نرمال صفر نمی‌باشد و مقدار تنش‌های عرضی برش در راستای عمود به صفحه وارد و در ضخامت ورق متغییر

بوده و تنش عرض نرمال نیز صفر فرض نمی‌شود و تناقضات یاد شده در دو تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول در این تئوری موجود نیست. محققان در بررسی ضربه از تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول و در موارد معدودی هم از تئوری لایه‌ای استفاده نموده‌اند. در مورد دو تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول: از بررسی کارهای انجام شده توسط گروهی از دانشمندان که در صفحات قبل مروری به آن داشتیم می‌توانیم به این نتیجه برسیم که پاسخ ورق کامپوزیت لایه‌ای به بار ضربه که در چهارچوب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول نتیجه می‌شود، دقیق‌تر از پاسخی است که توسط تئوری کلاسیک حاصل می‌گردد. دلیل این امر اثر تغییر شکل برشی است که در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در نظر گرفته شده است.

و در مورد تئوری لایه‌ای می‌توان گفت که: با استفاده از این تئوری پاسخ‌های دقیق‌تری برای تحلیل ضربه ورق‌های کامپوزیتی به دست می‌آید. [22] و دلیل آن هم این است که بسیاری از محدودیت‌ها و تناقضات دو تئوری پیشین در این تئوری موجود نیست. ولی استفاده از این تئوری برای تحلیل بار ضربه، بسیار وقت‌گیر می‌باشد و این به دلیل حجم زیاد محاسبات می‌باشد.

2-1 کارهای انجام شده در این پروژه

در قسمت 1-2 تئوری تغییر شکل برش مرتبه اول (FSDT) که با نام تئوری صفحه mindlin-Reissner نیز شناخته می‌شود معرفی شده است که تعمیم یافته تئوری تیر تیموشنکو است و معادلات حرکت

برای ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای از تئوری الاستیسیته سه بعدی به دست آمده است.

در قسمت 2-2 تئوری کلاسیک صفحه (CPT) معرفی شده است که هم ارز تئوری اولرو برنولی برای تیرها می‌باشد که برای صفحات نازک که تأثیر تغییر شکل برشی و سختی دورانی کوچک است به کار می‌رود.

در قسمت (2-3) تئوری جدیدی برای ورق معرفی شده که در آن با فرض متغیر بودن جابجایی در راستای عمود بر سطح و در ضخامت ورق، معادلات حرکت ورق با استفاده از اصل هامیلتون به دست آمده است.

در قسمت (2-4) ارتعاش آزاد ورق، در چهارچوب تئوری معرفی شده در قسمت (2-3) مورد بحث قرار گرفته و با به دست آوردن فرکانس‌ها و مودهای ارتعاش آزاد، پاسخ ورق به نیروی ضربه با استفاده از روش آنالیز مودال محاسبه شده است. در قسمت (2-5) تئوری صفحه مرتبه بالاتر ارائه شده است.

در فصل 3 مدل‌های مختلف ضربه شامل مدل جرم - فنر و مدل بالانس انرژی همراه با معادلات حاکم بر آن در شرایط مربوطه مورد بررسی قرار می‌گیرد

در قسمت 3-3 مدل‌های کاملی را برای توضیح ضربه دینامیکی بر روی تیر بر نولی بیان می‌شود تا بتوان راه تحلیلی برای نوسان طبیعی آن پیدا نمود

و در قسمت (3-4) و (3-5) با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه و تئوری تغییر شکل برشی ضربه بر روی صفحات را مورد بررسی قرار می‌دهیم

در قسمت (3-8) جواب تقریبی برای ضربه موج کنترل شده ارائه می‌گردد

در قسمت (3-7) تئوری پوسته که در این بخش با استفاده از معادلات حرکت
تأثیر ضربه روی ساختار مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد
در فصل (2-3) بر روی تست‌های ضربه برای شبیه‌سازی ضربه و همچنین مدل‌های
کیفی برای بیان الگوی لایه لایه شدن و تغییر شکل ساختار بحث می‌گردد.

2-1 تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

با توجه به تئوری خطی تیر تیموشنکو، با فرض این که کرنش نرمال عرضی ϵ_{zz} قابل اغماض است و کرنش برشی در تمام ضخامت صفحه یکنواخت است می‌توانیم این فرضیات را به صورت زیر بنویسیم:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2-1-1a)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_1 \quad (2-1-1b)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_2, \quad (2-1-1c)$$

که نشان می‌دهد متغیر مکان به صورت زیر است:

$$(2-1-2)$$

$$u(x, y, z) = u_o(x, y) + z(\gamma_1 - w_{o,x})$$

$$v(x, y, z) = v_o(x, y) + z(\gamma_2 - w_{o,y})$$

$$w(x, y, z) = w_o(x, y).$$

که با تغییر متغیر

$$\psi_x = \gamma_1 - w_{o,x}, \quad \psi_y = \gamma_2 - w_{o,y} \quad (2-1-3)$$

تغییر مکان بر حسب تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به صورت فرم معمولی

زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (2-1-4)$$

که u_o, v_o, w_o تغییر مکان یک نقطه روی midplane می‌باشد و ψ_x, ψ_y چرخش نرمال تا midplane حول محورهای x و y است. با فرض اینکه midplane صفحه راست باقی بماند، اغلب معادلات (2-1-4) به عنوان یک فرضیه در سینماتیک تغییر شکل هر پاره خط نرمال تا midplane بدیهی است.

کرنشهای بسیار کوچک اجزاء بوسیله روابط زیر مشخص می‌شود:

$$(2-1-4)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}$$

و از معادلات می‌توان تخمین زد که:

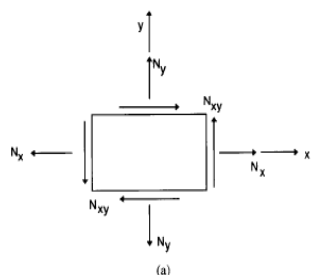
$$(2-1-5)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_o}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y},$$

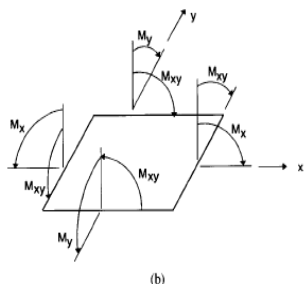
(2-1-6)

$$\epsilon_{zz} = 0, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right),$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x, \quad \epsilon_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y.$$



شکل 2-1 نیرو و گشتاور منته در صفحه



مطابق شکل (2-1) بار گسترده q بر روی صفحه‌ای قرار دارد. برآیند نیوری نرمال صفحه‌ای \hat{N}_n بر روی مرز Γ_1 و \hat{N}_s بر روی Γ_2 و گشاور برآیند \hat{M}_n و \hat{M}_s بر روی Γ_3 و Γ_4 و نیروی برشی Q_n بر روی Γ_5 است. برآیندنیروی صفحه‌ای به وسیله فرمول زیر مشخص می‌شود:

(2-1-7)

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz;$$

و گشتاور خمشی از:

$$(2-1-8)$$

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz;$$

و برآیند نیروی برشی از:

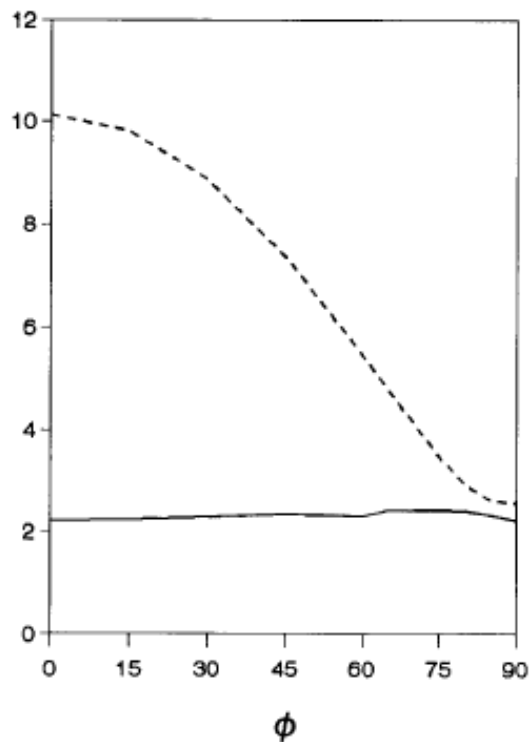
$$(Q_x, Q_y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz.$$

$$(2-1-9)$$

برآیند نیروی گشتارها بر روی صفحه‌ای کوچک،

همان طوری در شکل (2-1-a.6) نشان داده شده است، مشخص می‌شود که هم

طول و هم جهت با بردار واحد نرمال \bar{n} هستند.



شکل 2-2 منحنی توزیع انتشار امواج در صفحات غیر همجهت

برآیند نیروهای داخلی و برآیند گشتاور بر روی محورهای X و Y تصویر شده‌اند که عبارتند از:

$$\begin{aligned} N_n &= N_x n_x^2 + N_y n_y^2 + 2n_x n_y N_{xy} \\ N_s &= (N_y - N_x) n_x n_y + N_{xy} (n_x^2 - n_y^2) \\ M_n &= M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2n_x n_y M_{xy} \\ M_s &= (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2). \end{aligned} \quad (2-1-10)$$

و انرژی کششی در جامدات عبارت است از:

$$(2-1-11)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{xy} \epsilon_{xy} + \sigma_{xz} \epsilon_{xz} + \sigma_{yz} \epsilon_{yz}) dV.$$

که برای صفحه با استفاده از روابط تغییر مکان کششی (2-1-6) داریم:

$$(2-1-12)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \sigma_{xx} \frac{\partial u_o}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v_o}{\partial y} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + z \left[\sigma_{xx} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xz} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} + \psi_x \right) + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} + \psi_y \right) \right\} dz d\Omega. \end{aligned}$$

با انتگرال گیری بر روی ضخامت صفحه و با استفاده از توضیحات برای برآیند نیرو و گشتاور (2-1-9) و (2-1-7) انرژی کششی بصورت زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ N_x \frac{\partial u_o}{\partial x} + N_y \frac{\partial v_o}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) \right. \\
 + M_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
 \left. + Q_x \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_y \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} + \psi_y \right) \right\} d\Omega.
 \end{aligned}$$

(2-1-13)

که به طور خلاصه داریم:

(2-1-14)

$$\{N\} = [N_x, N_y, N_{xy}]^T$$

$$\{M\} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$$

$$\{\epsilon^o\} = [\epsilon_{xx}^o, \epsilon_{yy}^o, \epsilon_{xz}^o]^T = \left[\frac{\partial u_o}{\partial x}, \frac{\partial v_o}{\partial y}, \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right]^T$$

$$\{K\} = [K_x, K_y, K_{xy}]^T = \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right]^T$$

که ϵ^o کرنش خط میانی و $\{k\}$ انحنای صفحه است. انرژی کششی می تواند به صورت روبرو بازنویسی شود:

(2-1-15)

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\{N\}^T \{\epsilon^o\} + \{M\}^T \{\kappa\} + [Q_x, Q_y] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{Bmatrix} \right] dV.$$

و انرژی پتانسیل ناشی از نیروهای خارجی بدست می آید از:

$$(2-1-16)$$

$$V = - \int_{\Omega} q w_o d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{N}_n u_{no} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \hat{N}_s u_{so} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_3} \hat{M}_n \psi_n d\Gamma - \int_{\Gamma_4} \hat{M}_s \psi_n d\Gamma - \int_{\Gamma_5} \hat{Q}_n w_o d\Gamma.$$

و انرژی جنبشی صفحه مشخص می شود از:

$$(2-1-17)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho [(\dot{u})^2 + (\dot{v})^2 + (\dot{w})^2] dV.$$

با استفاده از معادله (2-1-4) داریم:

$$(2-1-18)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho [(\dot{u}_o + z\dot{\psi}_x)^2 + (\dot{v}_o + z\dot{\psi}_y)^2 + (\dot{w}_o)^2] dz d\Omega$$

که می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$(2-1-19)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ I_1 (\dot{u}_o^2 + \dot{v}_o^2 + \dot{w}_o^2) + 2I_2 (\dot{u}_o \dot{\psi}_x + \dot{v}_o \dot{\psi}_y) \\ + I_3 (\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2) \} d\Omega$$

که لختی بدست می آید از:

$$(2-1-20)$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2) dz.$$

I_1 جرم بر واحد طول است، I_3 معمولاً لختی دورانی نامیده می‌شود و I_2 یک گشتاور است که اگر صفحه حول XY متقارن باشد حذف می‌شود.

روابط تنش - کرنش برای صفحات تک لایه که از مواد چند سان گرد هستند عبارتند از:

$$(2-1-21)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}.$$

روابط کرنش - تغییر مکان (2-1-6) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$(2-1-22)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

یا

$$(2-1-23)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_o\} + z\{\kappa\}$$

که ϵ_o بردار کرنش خط وسط صفحه است و κ حاکی از انحناء داشتن صفحه

است. با استفاده از معادلات (2-1-9) و (2-1-7) ما داریم:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-1-24)$$

که

$$A_{ij} = \sum \bar{Q}_{ij|k} (z_k - z_{k-1}) \quad (2-1-25)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum \bar{Q}_{ij|k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2-1-26)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum \bar{Q}_{ij|k} (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad (2-1-27)$$

این گشتاور موقعی که به صورت متقارن باشد حذف می‌شود در این مورد ماتریس B حذف می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2-1-28)$$

$$A_{ij} = k_i k_j \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz, \quad i, j = 4, 5. \quad (2-1-29)$$

K_i, K_j دو فاکتور برشی هستند که در محاسبه جاهایی که توزیع تنش برشی در سرتاسر ضخامت به صورت غیر همسان و یا سهمی شکل است، منظور می‌شود

همانطور که در (2-1-6) اشاره شد.

K_i, K معمولاً $\frac{5}{6}$ گرفته می‌شود. طبق قانون هامیلتون معادله حرکت بر حسب

برآیند نیرو و گشتاور داده شده است.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u}_o + I_2 \ddot{\psi}_x \quad (2-1-30)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{v}_o + I_2 \ddot{\psi}_y \quad (2-1-31)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_1 \ddot{w}_o \quad (2-1-32)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_3 \ddot{\psi}_x + I_2 \ddot{u}_o \quad (2-1-33)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = I_3 \ddot{\psi}_y + I_2 \ddot{v}_o \quad (2-1-34)$$

با جایگذاری (2-1-24) در (2-1-34) - (2-1-30) معادله حرکت برای چند

لایه‌ای‌های عمومی بر حسب تغییر مکان بدست می‌آید. این معادلات خیلی طولانی

هستند و در اینجا قابل تکرار نیستند. ما بجای آنها در زیر معادلات حرکت برای

صفحات چند لایه‌ای متقارن را ارایه کنیم. ($[B] = 0$)

برای کاربردهای وسیعتر وقتی که از چند لایه‌ای‌های متقارن استفاده می‌شوند

مشکل جدی ایجاد نمی‌شود.

$$(2-1-35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[A_{45} \left(\psi_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) + A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) + A_{45} \left(\psi_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) \right] + q = I_1 \dot{w}_o \end{aligned} \quad (2-1-36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\ & - A_{45} \left(\psi_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) - A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) = I_3 \ddot{\psi}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[D_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right] \\ & - A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) - A_{45} \left(\psi_x + \frac{\partial w_o}{\partial x} \right) = I_3 \ddot{\psi}_y \end{aligned} \quad (2-1-37)$$

2-2 تئوری کلاسیک صفحه (CPT)

مطابق تئوری بنیادین تیرها، برای تئوری کلاسیک صفحه هم، تأثیر تغییر مکان برشی و لختی دورانی درافزایش کرنش نرمال عرضی قابل اغماض هستند. بنابراین تابع γ_1 و γ_2 در (2-1-1 b,c) در نظر گرفته می‌شوند. و مطابق رابطه (2-1-3) داریم:

$$\frac{\partial w_o}{\partial x} + \psi_x = 0, \quad \frac{\partial w_o}{\partial y} + \psi_y = 0. \quad (2-2-1)$$

توابع ψ_x و ψ_y می‌تواند از فرمول حذف شوند و تغییر مکان به صورت زیر نوشته شوند.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial x}(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) - z \frac{\partial w_o}{\partial y}(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y). \end{aligned} \quad (2-2-2)$$

فرض می‌کنیم که این مقدار معرف خط نرمال صفحه میانی قبل از تغییر شکل باشد که بعد از تغییر شکل مستقیم و عمود بر صفحه باقی می‌ماند و کرنش صفحه میانی نیز بدون تغییر باقی می‌ماند. انحنای صفحه از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\{K\} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T. \quad (2-2-3)$$

با جایگذاری در معادلات (2-1-33) و (2-1-34) و از ترکیب آن دو معادله، معادله زیر بر حسب برآیند گشتاور بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q - I_1 \ddot{w}_o \\ = I_3 \left\{ -\frac{\partial^2 \ddot{w}_o}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \ddot{w}_o}{\partial y^2} \right\} + I_2 \left\{ \frac{\partial \ddot{u}_o}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_o}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2-2-4)$$

قبلاً تأثیر تغییر شکل برشی در نظر گرفته نشد و این معقول است که لختی دورانی نادیده گرفته شود و $[I_3 = 0]$. برای یک صفحه با لایه‌های متقارن $[I_2 = 0]$ و $\beta_{ij} = 0$ حرکت عرضی مستقل از حرکت صفحه‌ای است. بنابراین تغییر مکان باید یک معادله منفرد حرکت را جبران کند.

$$q = D_{11} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x \partial y^3} + I_1 \ddot{w}_o \quad (2-2-5)$$

معادله (2-2-5) یک معادله حرکت برای صفحات چند لایه متقارن بر طبق تئوری کلاسیک صفحه است و بر حسب تغییر مکان عرضی (0) بیان شده است.

2-3 ارائه یک تئوری جدید

در فصل 1-2 تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق شرح داده شد. در این تئوری، فرض بر این است که مؤلفه عرضی جابجایی ورق در ضخامت ورق ثابت باشد ولی واقعیت این است که در اعمال یک بار عرضی همانند ضربه بر روی سطح ورق، خاصه ورق‌هایی که نسبت ضخامت به طولشان خیلی کوچک نباشد، این فرض نمی‌تواند صادق باشد. و بهتر آن است که مؤلفه عرضی جابجایی در ضخامت ورق متغییر فرض شود، که در این صورت کرنش عرضی نرمال و در عرض ورق، تابع مختصه هندسی Z است و کرنش‌های برشی عرضی نیز تابع این مختصه خواهد بود. در پدیده ضربه به سطح ورق، زمان تماس به قدری کم است که کل ورق در این فرصت بسیار کوتاه نمی‌تواند خم شود و در عرض در این بازه زمانی، در موضع ضربه، فرو رفتگی بوجود می‌آید، و در زمانهای بعد از جدا شدن گلوله از سطح ورق، خمش کلی ورق ظاهر می‌شود. بنابراین، با توجه به این که فرض اولیه در تئوری ارائه شده در این فصل نیز کماکان برقرار است ولی مؤلفه عرضی جابجایی (0)، در ضخامت ورق تابعی از مختصه Z در نظر

گرفته می‌شود که در هر لایه فیزیکی یا فرضی به صورت خطی تغییر می‌یابد. همچنین در تئوری معرفی شده در این بخش بر خلاف فرض صفحه‌ای بدون تنش در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، رابطه اساسی بین تنش و کرنش در هر نقطه به صورت کلی در نظر گرفته می‌شود.

2-3-1 فرض اولیه جابجایی‌ها:

فرض چگونگی جابجایی‌ها در هر نقطه از صفحه و در این تئوری بخصوص به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \end{aligned} \quad (2-3-1)$$

$$w(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i(x, y, t)\phi_i(z) = w_i(x, y, t)\phi_i(z)$$

فرض تابع W در رابطه فوق بدین معنی است که مولفه جابجایی در راستای عمود بر صفحه به صورت خطی در هر لایه i زیاد می‌شود. w^i مولفه جابجایی در راستای عمود بر صفحه و در نقطه $Z=Z_i$ است.

2-3-2 معادلات حرکت ورق

از معادلت (2-3-1) نتیجه می‌شود که کرنش‌ها مطابق روابط زیر می‌باشند:

$$\phi_i(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z \leq z_{i-1} \\ \frac{z - z_i - 1}{t_i - 1} & z_{i-1} \leq z \leq z_i \\ \frac{z_{i+1} - 2}{t_i + 1} & z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ 0 & z \geq z_{i+1} \end{cases} \quad (2-3-2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^\circ + z k_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^\circ + z k_y \\ \varepsilon_z &= w^i \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^\circ + z k_{xy} \\ \gamma_{xz} &= \psi_x + \phi_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \psi_y + \phi_i \frac{\partial w_i}{\partial y} \end{aligned} \quad (2-3-3)$$

که در این روابط کرنش‌های صفحه میانی $\varepsilon_x^\circ, \varepsilon_y^\circ, \delta_{xy}^\circ$ و انحناءهای صفحه میانی K_x, K_y, K_{xy} همانند روابط قسمت قبل می‌باشند. از روابط (2-3-9) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}
\delta \varepsilon_x &= \delta \varepsilon_x + z \delta k_x \\
\delta \varepsilon_y &= \delta \varepsilon_y + z \delta k_y \\
\delta \varepsilon_z &= \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \delta w_i \\
\delta \gamma_{xy} &= \delta \gamma_{xy} + z \delta k_{xy} \\
\delta \gamma_{xz} &= \delta \psi_x + \phi_i \frac{\partial \delta w_i}{\partial x} \\
\delta \gamma_{yz} &= \delta \psi_y + \phi_i \frac{\partial \delta w_i}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{2-3-4}$$

واریانس مجموع انرژی پتانسیل U برای یک ورق الاستیک به صورت زیر می باشد:

$$\delta u = \int_{v,i} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx dy dz \tag{2-3-5}$$

و برای ورقی به طول و عرض و ارتفاع a و b و t.

$$\delta u = \int_0^t \int_0^a \int_0^b \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dx dy dz \tag{2-3-6}$$

با جایگذاری روابط (2-3-4) و (2-3-6) خواهیم داشت

$$\tag{2-3-7}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial \delta \psi_x}{\partial x} + N_Y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + M_x \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \delta \omega_i M_{2i} + N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial u} \\
& + M_{xy} \frac{\partial \delta \phi_0}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial \delta \psi_y}{\partial x} + \phi_x \delta \psi_x + R_{xi} \frac{\partial \delta w_i}{\partial x} + \phi_y \delta \psi_y + R_{yi} \frac{\partial \delta w_i}{\partial y} \Big| dx dy
\end{aligned}$$

(2-3-8)

$$\begin{aligned}
(N_X, N_Y, N_{XY}) &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\
(M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \\
(\sigma_x, \sigma_y) &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \\
M_{zi} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \sigma_z dz \\
R_{xi} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \phi_i \sigma_{xy} dz \\
R_{yi} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \phi_i \sigma_{yz} dz
\end{aligned}$$

رابطه (2-3-7) با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر نوشته

می شود:

(2-3-9)

$$\begin{aligned}
U = \int_0^a \int_0^b [& 1 - \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_o - \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \delta v_o - \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \phi_x \right) \delta \psi_x - \\
& \left(\frac{\partial R_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yi}}{\partial y} - M_{zi} \right) \delta \omega_i] dx dy
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^b \left[[N_x \delta u_0]_0^a + [N_{xy} \delta v_0]_0^a + [M_x \delta \psi_x]_0^a + [M_{xy} \delta \varphi_y]_0^a + [R_{xi} \delta w_i]_0^a \right] dy +$$

$$\int_0^a \left[[N_{xy} \delta u_0]_0^b + [dy \delta v_0]_0^b + [M_{xy} \delta \psi_x]_0^b + [M_y \delta \psi_y]_0^b + [R_{yi} \delta w_i]_0^b \right] dx$$

انرژی پتانسیل بار عرضی خارجی بوسیله رابطه زیر بیان می‌شود:

$$V = - \int_0^a \int_0^b g(x, y, t) \omega'(x, y, t) dx dy \quad (2-3-10)$$

که $g(x, y, t)$ توزیع بار روی سطح ورق می‌باشد بنابراین:

$$\delta V = - \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) \delta \omega'(x, y, t) dx dy \quad (2-3-11)$$

مجموع انرژی با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_{v_0} p' (u^2 + v^2 + \omega^2) d(v_{01}) \quad (2-3-12)$$

واریانس روابط فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta T = \int_0^a \int_0^b \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} p(u \delta u + v \delta v + w \delta w) dx dy dz \quad (2-3-13)$$

رابطه فوق می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\delta T = \int_0^a \int_0^b \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} p \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [u \delta u + v \delta v + w \delta w] - [u \delta u + v \delta v + w \delta w] \right\} dx dy dz \quad (2-3-14)$$

اگر از رابطه فوق نسبت به زمان انتگرال گیری شود، خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_t d_t = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -p(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) dx dy dz \quad (2-3-15)$$

که در نوشتن رابطه فوق فرض شده:

$$\begin{aligned} \delta u(t_1) = \delta u(t_2) &= 0 \\ \delta v(t_1) = \delta v(t_2) &= 0 \\ \delta w(t_1) = \delta w(t_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2-3-16)$$

با جایگذاری روابط (2-3-1) و (2-3-15):

$$(2-3-17)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_t d_t = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -p[(\ddot{u}_0 + z\ddot{\psi}_x)(\delta u_0 + z\delta\psi_x) + (\ddot{v}_0 + z\ddot{\psi}_y)(\delta v_0 + z\delta\psi_y) + \delta z]$$

و می توان نوشت:

$$(2-3-18)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_t d_t = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} -p[(\ddot{u}_0 + z\ddot{\psi}_x)(\delta u_0 + z\delta\psi_x) + (\ddot{v}_0 + z\ddot{\psi}_y)(\delta v_0 + z\delta\psi_y) +$$

$$(\phi_i \ddot{w}_i)(\phi_j \delta w^j)] dx dy dz$$

$$(2-3-19)$$

$$(I_2 \ddot{v}_0 + I_3 \ddot{\psi}_y) \delta\psi_y + I_{ij} \ddot{w}_j \delta w_i] dx dy dz$$

طبق اصل هامیلتون:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta u + \delta v - \delta t) dt = 0 \quad (2-3-20)$$

با جایگذاری روابط (2-3-9) و (2-3-11) و (2-3-18) در رابطه فوق الذکر،

خواهیم داشت:

(2-3-21)

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_0^t \int_0^a \int_0^b \left[\left(-\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + I_1 \ddot{u}_o + I_2 \ddot{\psi}_x \right) \delta u_o + \left(-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{N_y}{\partial y} + I_1 \ddot{v}_o + I_2 \ddot{\psi}_y \right) \delta v_o + \left(-\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \phi_x + I_2 \ddot{u}_o + I_3 \ddot{\psi}_x \right) \delta \psi_x \right. \\
 & + \left. \left(-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + \phi_y + I_2 \ddot{v}_o - I_3 \ddot{\psi}_y \right) \delta \psi_y + \left(-\frac{R_{xi}}{\partial x} - \frac{R_{yi}}{\partial y} + M_{zi} \right. \right. \\
 & \left. \left. I_{ij} \ddot{\omega}_j - q(x, y, t) \delta_{li} \right) \delta w_i \right] dx dy dt + \int_0^b \{ [N_x \delta u_o]_0^a + [N_{xy} \delta v_o]_0^a + [M_x \delta \psi_x]_0^a + \\
 & [M_{xy} \delta \psi_y]_0^a + [R_{xi} \delta w_i]_0^a \} dy + \int_0^a \{ [N_{xy} \delta u_o]_0^b + [N_y \delta v_o]_0^b + [M_{xy} \delta \psi_x]_0^b + \\
 & [M_y \delta \psi_y]_0^b + [R_{yi} \delta w_i]_0^b \} dx
 \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (2-3-21) معادلات حرکت ورق نرم روابط زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u}_o + I_2 \ddot{\psi}_x \quad (2-3-22 - \text{الف})$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{v}_o + I_2 \ddot{\psi}_y \quad (2-3-22 - \text{ب})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \phi_x = I_2 \ddot{u}_o + I_3 \ddot{\psi}_x \quad (2-3-22 - \text{ج})$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \phi_y = I_2 \ddot{v}_o + I_3 \ddot{\psi}_y \quad (2-3-22 - \text{د})$$

$$\frac{\partial R_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yi}}{\partial y} - M_{zi} + q \delta_{li} = I_{ij} \ddot{\omega}_j \quad (2-3-22 - \text{هـ})$$

که در معادلات فوق تابع δ_{li} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{li} = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases} \quad (2-3-23)$$

و J_i می‌توانند هر یک از مقادیر $(1, 2, \dots, N, N+1)$ را دارا باشند.
 و نیز از رابطه (2-3-21) شرایط مرزی به صورت آنچه در زیر خواهد آمد، نتیجه می‌شوند.

در X, a و $X, 0$ باید:

$N_x = 0$ یا u_0 مشخص باشد.

$N_{xy} = 0$ یا v_0 مشخص باشد.

$M_x = 0$ یا ψ_x مشخص باشد.

$M_{xy} = 0$ یا ψ_y مشخص باشد.

$R_{xi} = 0$ یا w^i مشخص باشد.

و در $y=b$ و $y=0$ باید:

$N_{xy} = 0$ یا u_0 مشخص باشد.

$N_y = 0$ یا v_0 مشخص باشد.

$M_{xy} = 0$ یا ψ_x مشخص باشد.

$M_y = 0$ یا ψ_y مشخص باشد.

$R_{yi} = 0$ یا w^i مشخص باشد.

2-3-3 روابط اساسی

برای نوشتن معادلات ورق بر حسب توابع $(\omega^i, \psi_y, \psi_x, v_0, u_0)$ باید سمت چپ تساوی روابط (2-3-8) و (2-3-9) به صورت ترکیب خطی توابع یاد شده نوشته

شوند.

با در نظر گرفتن رابطه تنش کرنش برای یک لایه ارتوتروپ در دستگاه مختصات غیر هم محور با تار (ORF-axis) رابطه زیر را داریم:

(2-3-24)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & \bar{c}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & \bar{c}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{54} & \bar{c}_{55} & 0 \\ \bar{c}_{61} & \bar{c}_{62} & \bar{c}_{63} & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{y2} \\ \gamma_{x2} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

رابطه (الف-8-3-2) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & \bar{c}_{36} \\ \bar{c}_{61} & \bar{c}_{62} & \bar{c}_{63} & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz$$

ضخامت ورق $K=1,2,3,\dots,N$ شماره لایه می‌باشد. با استفاده از روابط (4-3)

در عبارت فوق‌الذکر خواهیم داشت:

(2-3-26)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{61} & \bar{c}_{62} & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x + 2k_x \\ \varepsilon_y + 2k_y \\ \gamma_{xy} + 2k_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{c}_{13} \\ \bar{c}_{23} \\ \bar{c}_{63} \end{bmatrix}^{(k)} w_i \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dz$$

که معادل است با:

(2-3-27)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{61} & \bar{c}_{62} & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} dz \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{16} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{26} \\ \bar{c}_{61} & \bar{c}_{62} & \bar{c}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} dz \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \bar{c}_{13} \\ \bar{c}_{23} \\ \bar{c}_{63} \end{bmatrix}^{(k)} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dz w_i$$

و در نهایت:

(2-3-28)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13}^i \\ A_{23}^i \\ A_{63}^i \end{bmatrix} w_i$$

که در آن $i=1,2,0,N,N+1$ و:

$$B_{pq} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \bar{c}_{pq} dz = \sum_{k=1}^n \bar{C}_{pq}^{(k)} \frac{z_{k+1}^2 + z_k^2}{2} \quad (2-3-30)$$

$$A_{pq} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \bar{C}_{pq}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \bar{C}_{pq}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \quad (2-3-29)$$

$$A_{pq} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \bar{C}_{pq}^{(k)} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dz = \bar{C}_{pq}^{(i-1)} - \bar{C}_{pq}^{(i)} \quad (2-3-31)$$

که در رابطه اخیر، بنابر تعریف $\bar{C}_{pq}^{(i)}$ به ازاء $i=0$ و $i=N+1$ صفر می باشد

برای بقیه روابط (2-3-8) با روشی مشابه می توان ثابت نمود که:

(2-3-32)

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{13}^i \\ B_{23}^i \\ B_{33}^i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} - & - \\ B_{44}^i & B_{45}^i \\ - & - \\ B_{54}^i & B_{55}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2-3-33)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{yi} \\ R_{xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} - & - \\ B_{44}^i & B_{45}^i \\ - & - \\ B_{54}^i & B_{55}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44}^{ij} & D_{45}^{ij} \\ D_{54}^{ij} & D_{55}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2-3-34)$$

$$M_{zi} = \begin{pmatrix} A_{31}^i & A_{32}^i & A_{36}^i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{31}^i & B_{32}^i & B_{36}^i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} + A_{33} w_i \quad (2-3-35)$$

که در روابط فوق:

$$D_{pq} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} c_{pq} z^2 dz = \sum_{k+1}^{n-(k)} c_{pq} \frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3} \quad (2-3-36)$$

$$B_{pq}^i = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} c_{pq} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} z dz = c_{pq} \begin{matrix} -(i-1) - \\ z_{i-1} - \end{matrix} - c_{pq} \begin{matrix} -(i) - \\ z_i - \end{matrix} \quad (2-3-37)$$

$$B_{pq}^{-i} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} c_{pq} \phi_i dz = c_{pq} \frac{T_{i-1}^{-(i-1)}}{2} + c_{pq} \frac{T_i^{-(i)}}{2} \quad (2-3-38)$$

$$D_{pq}^i = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} c_{pq} \phi_i \phi_j dz \left| \begin{array}{ll} \frac{-(i-1)}{c_{pq}} \frac{T_{i-1}}{6} & j = i = 1 \\ \frac{-(i-1)}{c_{pq}} \frac{T_i}{3} + \frac{-(i-1)}{c_{pq}} \frac{T_{i-1}}{3} & j = i \\ \frac{-(i)}{c_{pq}} \frac{t_i}{6} & j = i + 1 \\ 0 & j \neq i - 1, \end{array} \right. \quad (2-3-39)$$

$$A_{pq}^i = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} c_{pq} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dz \left| \begin{array}{ll} \frac{-(i-1)}{-c_{pq}} & j = i = 1 \\ \frac{-(i-1)}{c_{pq}} + \frac{-(i)}{c_{pq}} & j = i \\ \frac{-(i)}{-c_{pq}} & j = i + 1 \\ \frac{t_i}{0} & j \neq i - 1, \end{array} \right. \quad (2-3-40)$$

که t_i و \bar{z}_i به ترتیب ضخامت لایه و متوسط مختصه دو لایه i ام می‌باشند و طبق تعریف به ازاء $i=0$ و $i=d+1$ صفر می‌باشند.

اگر ماده بکار رفته در تمام لایه یکسان باشد. با روشی مشابه، بانترال گیری رابطه (2-3-19) می‌توان نوشت:

$$I_1 = \rho(z_{n+1} - z_1) \quad (2-3-41)$$

$$I_2 = \frac{\rho z_{n+1}^2 - z_1^2}{2} \quad (2-3-42)$$

$$I_3 = \rho \frac{z_{n+1}^3 - z_1^3}{3} \quad (2-3-43)$$

$$I_{ij} = \begin{cases} \rho \frac{t_1 - 1}{6} & j = i - 1 \\ \rho \frac{t_1 - 1}{3} & j = i \\ \rho \frac{t_1}{6} & j = i + 1 \\ 0 & j \neq i - 1, i, i + 1 \end{cases} \quad (2-3-44)$$

2-3-4 صفحات کامپوزیت لایه‌ای متقارن با زوایای فیبر 0° و 90°

قبل از بررسی این گونه صفحات، ابتدا روابط (2-3-29) و (2-3-36) به گونه دیگر نوشته می‌شوند، لازم به تذکر است که عناصر ماتریسی سختی در دستگاه مختصات غیر هم محور با تار (off-axis) می‌تواند بر حسب عناصر ماتریسی سختی در دستگاه مختصات هم محور با تار (on-axis) با استفاده از روابط زیر محاسبه شوند:

$$(2-3-45)$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{12}^{(k)} &= j_4 - j_3 \cos(4\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{22}^{(k)} &= j_1 - j_2 \cos(4\theta^{(k)}) + j_3 \cos(4\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{16}^{(k)} &= \frac{1}{2} j_2 \sin(2\theta^{(k)}) + j_3 \sin(4\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{26}^{(k)} &= \frac{1}{2} j_2 \sin(2\theta^{(k)}) - j_3 \sin(4\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{66}^{(k)} &= \frac{1}{2} (j_1 - j_4) - j_3 \cos(4\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{44}^{(k)} &= j_7 + j_8 \cos(2\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{45}^{(k)} &= -j_8 \sin(2\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{55}^{(k)} &= j_7 - j_8 \cos(2\theta^{(k)}) \\
\bar{C}_{36}^{(k)} &= j_6 \sin(2\theta^{(k)})
\end{aligned}$$

(2-3-46)

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{8} (3c_{11} + 2c_{12} + 4c_{66} + 3c_{22}) \\
J_2 &= \frac{1}{2} (c_{11} - c_{22}) \\
J_3 &= \frac{1}{8} (c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - 4c_{66}) \\
J_4 &= \frac{1}{8} (c_{11} + c_{22} + 6c_{12} - 4c_{66}) \\
J_5 &= \frac{1}{2} (c_{13} + c_{23}) \\
J_6 &= \frac{1}{2} (c_{13} - c_{23}) \\
J_7 &= \frac{1}{2} (c_{44} - c_{55}) \\
J_8 &= \frac{1}{2} (c_{44} - c_{55})
\end{aligned}$$

با فرض یکسان بودن ماده تشکیل دهنده لایه‌ها، ترکیب روابط (4-45) و (4-29)

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= J_1 t + J_2 A_{c2} + J_3 A_{c4} \\
A_{12} &= J_4 t - J_3 A_{c4} \\
A_{22} &= J_1 t - J_2 A_{c2} + J_3 A_{c4} \\
A_{16} &= \frac{1}{2} J_2 A_{s2} + J_3 A_{s4} \\
A_{26} &= \frac{1}{2} J_2 A_{s2} - J_3 A_{s4} \\
A_{66} &= \frac{1}{2} (J_1 - J_4) t - J_3 A_{c4} \\
A_{45} &= -J_8 A_{s2} \\
A_{55} &= J_7 t - J_8 A_{c2}
\end{aligned}$$

که در روابط فوق:

$$(2-3-48)$$

$$\begin{aligned}
A_{c2} &= \sum_{k=1}^n \cos(2\theta^{(k)}) t_k \\
A_{c4} &= \sum_{k=1}^n \cos(4\theta^{(k)}) t_k \\
A_{s2} &= \sum_{k=1}^n \sin(2\theta^{(k)}) t_k \\
A_{s4} &= \sum_{k=1}^n \sin(4\theta^{(k)}) t_k
\end{aligned}$$

هم چنین با ترکیب (2-3-45) و (2-3-36) می توان روابط زیر را نتیجه گیری

کرد:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= J_1 \frac{t^3}{12} + J_2 D_{c2} + J_3 D_{c4} \\
D_{12} &= J_4 \frac{t^3}{12} + J_3 D_{c4} \\
D_{22} &= J_1 \frac{t^3}{12} - J_2 D_{c2} + J_3 D_{c4} \\
D_{16} &= \frac{1}{2} J_2 D_{s2} + J_3 D_{s4} \\
D_{26} &= \frac{1}{2} J_2 D_{s2} - J_3 D_{s4} \\
D_{66} &= \frac{1}{2} (J_1 - J_4) \frac{t^3}{12} - J_3 D_{c4}
\end{aligned} \tag{2-3-49}$$

که در روابط فوق:

$$(2-3-50)$$

$$D_{c1} = \sum_{k=1}^n \cos(2\theta^{(k)}) \frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3}$$

$$D_{c4} = \sum_{k=1}^n \cos(4\theta^{(k)}) \frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3}$$

$$D_{s2} = \sum_{k=1}^n \sin(2\theta^{(k)}) \frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3}$$

$$D_{s4} = \sum_{k=1}^n \sin(4\theta^{(k)}) \frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{3}$$

برای صفحات کامپوزیت لایه‌ای متقارن، از رابطه (2-3-30) نتیجه می‌شود:

$$B_{p,q} = 0 \quad (2-3-51)$$

همچنین از رابطه (2-3-19) نتیجه می‌شود:

$$I_2 = 0 \quad (2-3-52)$$

برای صفحات لایه‌ای متقارن با زوایای فیبر 0° و 90° با استفاده از روابط (2-3-

45) می‌توان نتیجه‌گیری نمود:

$$(2-3-53)$$

و نیز با دقت در روابط (2-3-47) و (2-3-50) می‌توان نوشت

$$A_{16} = A_{26} = A_{45} = 0 \quad (2-3-54)$$

$$D_{16} = D_{26} = 0 \quad (2-3-55)$$

رابطه (4-28) با توجه به روابط (2-3-51) و (2-3-55) به صورت رابطه زیر

نوشته:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{13}^i \\ A_{23}^i \\ 0 \end{bmatrix} \omega^i \quad (2-3-56)$$

و روابط (2-3-32) و (2-3-35) با استفاده از روابط (2-3-51) و (2-3-55)

می‌توانند به صورت روابط زیر نوشته شوند:

$$(2-3-57)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{13}^i \\ B_{23}^i \\ 0 \end{bmatrix} \omega^i$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_y \\ \psi_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i & 0 \\ B_{44} & 0 \\ 0 & -i \\ 0 & B_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W_i}{\partial y} \\ \frac{\partial W_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-3-58)$$

$$\begin{Bmatrix} R_{yi} \\ R_{xi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ B_{44} & 0 \\ 0 & -i \\ 0 & B_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_y \\ \psi_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44}^{ij} & 0 \\ 0 & D_{55}^{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial W_i}{\partial y} \\ \frac{\partial W_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-3-59)$$

$$M_{zi} = (A_{31}^i - A_{32}^i) \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \end{bmatrix} + (B_{31}^i - B_{32}^i) \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} + A_{33}^{ij} \omega^i \quad (2-3-60)$$

با جایگذاری روابط (2-3-52) و (2-3-56) و (2-3-60) در معادلات حرکت ورق

(2-3-22) می‌توان این معادلات را بر حسب توابع u, w, ψ_y, ψ_x, v نوشت:

(الف - 2-3-61)

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{13}^i \frac{\partial w_i}{\partial x} = I_1 \ddot{U}$$

$$(A_{21} - A_{66}) \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + A_{23}^i \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = I_1 \ddot{V}_0 \quad \text{(ب- 2-3-61)}$$

(ج- 2-3-61)

$$D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - A_{55} \psi_x + (B_{13}^i - B_{55}^i) \frac{\partial \omega_i}{\partial x} = I_3 \ddot{\phi}_x$$

(د- 2-3-61)

$$(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - A_{44} \psi_y + (B_{23}^i - B_{44}^i) \frac{\partial \omega_i}{\partial y} = I_3 \ddot{\phi}_y$$

(ه- 2-3-61)

$$-A_{31}^i \frac{\partial U_0}{\partial x} - A_{32}^i \frac{\partial V_0}{\partial y} + (B_{55}^i - B_{31}^i) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + (B_{44}^i - B_{32}^i) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{55}^{ij} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + D_{44}^{ij} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} -$$

$$-_{ij} A_{33} \omega_j + q(x, y, t) \delta_{ij} = I_{ij} \ddot{w}_j$$

معادله (ه- 2-3-61) در واقع (N+1) معادله دیفرانسیل می‌باشد. در معادلات

(2-3-61) $i = 1, 2, 3, \dots, N_1(N+1)$ و $j = i-1, i, i+1$ روابط 2-3-61 نشان دهنده

معادلات حرکت ورق برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای متقارن با زوایای فیبر 0° و

90° می‌باشند.

2-4 بررسی ضربه در چارچوب تئوری ورق ارائه شده در بخش (2-3)

در بخش (2-3) معادلات حرکت ورق کامپوزیت لایه‌ای متقارن با زوایای الیاف 0°

و 90° به فرم روابط زیر بدست آمدند:

$$A_{11} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + A_{13}^i \frac{\partial w_i}{\partial x} = I_1 \ddot{U}_0 \quad \text{(الف - 2-4)}$$

$$(A_{21} - A_{66}) \frac{\partial^2 U_o}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 V_o}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 V_o}{\partial x^2} + A_{23}^i \frac{\partial w_i}{\partial y} = I_1 \ddot{V}_o \quad (2-4 - \text{ب})$$

$$(2-4 - \text{ج})$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - A_{55} \psi_x + (B_{13}^i - \bar{B}_{55}^i) \frac{\partial w_i}{\partial x} = I_3 \ddot{\phi}_x$$

$$(2-4 - \text{د})$$

$$(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - A_{44} \psi_y + (B_{23}^i - \bar{B}_{44}^i) \frac{\partial w_i}{\partial y} = I_3 \ddot{\phi}_y$$

$$(2-4 - \text{هـ})$$

$$-A_{31}^i \frac{\partial U_o}{\partial x} - A_{32}^i \frac{\partial V_o}{\partial y} + (B_{55}^i - B_{31}^i) \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + (B_{44}^i - B_{32}^i) \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + D_{55}^{ij} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + D_{44}^{ij} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} - A_{33}^{ij} w_j + q(x, y, t) \delta_{ij} = I_{ij} \ddot{w}_j$$

که معادله آخر، در واقع $(n+1)$ معادله می باشد و $J=i-$

$$1, I, i+1, I=1, \dots, N, N+1$$

در صورتی که شرایط تکیه گاهی در اطراف ورق مستطیلی شکل، بصورت تکیه گاه ساده باشد .

شرایط مرزی بصورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} u_o(0, y) = V_o(0, y) = w(0, y) = M_x(0, y) = \psi_y(0, y) = 0 \\ u_o(a, y) = V_o(a, y) = w(a, y) = M_x(a, y) = \psi_y(a, y) = 0 \\ u_o(x, 0) = V_o(x, 0) = w(x, 0) = M_y(x, 0) = \psi_x(x, 0) = 0 \\ u_o(x, b) = V_o(x, b) = w(x, b) = M_y(x, b) = \psi_x(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (2-4-2)$$

در این بخش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای معمولی (2-4-1) همراه با

شرایط مرزی (2-4-2) روش آنالیز مودال استفاده می‌شود:

2-4-1 محاسبه فرکانس ویژه و شکل مود مربوطه

معادلات حرکت ارتعاش آزاد همانند معادلات حرکت اجباری می‌باشد با این تفاوت

که

$$g(x, y, t) = 0 \quad (2-4-3)$$

با در نظر گرفتن شرایط زیر برای $\omega, \psi_y, \psi_x, v_0, u_0$ شرایط مرزی (2-4-2) ارضا

می‌شوند.

$$(2-4-4)$$

$$U_o(x, y, t) = U_{mnl}^o(x, y)e^{j\omega_{mnl}t}$$

$$V_o(x, y, t) = V_{mnl}^o(x, y)e^{j\omega_{mnl}t}$$

$$\psi_x(x, y, t) = \psi_{x \quad mnl}(x, y)e^{j\omega_{mnl}t}$$

$$\psi_y(x, y, t) = \psi_{y \quad mnl}(x, y)e^{j\omega_{mnl}t}$$

$$w^i(x, y, t) = w_{mnl}^i(x, y)e^{j\omega_{mnl}t}$$

توجه: در روابط (2-4-4) اندیس‌های تکراری در یک عبارت نشان دهنده جمع

اندیس می‌باشند. همچنین ω_{mnl} فرکانس حرکت ارتعاشی ورق می‌باشد و:

$$(2-4-5)$$

$$U_{mnl}^o(x, y) = G_{mnl} \cos(a_m x) \sin(B_n y)$$

$$V_{mnl}^o(x, y) = H_{mnl} \sin(a_m x) \cos(B_n y)$$

$$\psi_{x, mnl}^o(x, y) = J_{mnl} \cos(a_m x) \sin(B_n y)$$

$$\psi_{y, mnl}^o(x, y) = \rho_{mnl} \sin(a_m x) \cos(B_n y)$$

$$w_{mnl}^i(x, y) = T_{mnl}^i \sin(a_m x) \sin(B_n y)$$

با جایگذاری روابط (2-4-4) در معادلات (2-4-1) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} G_{mnl}(A_u \alpha_m^2 + A_{66} \beta_n^2) + H_{mnl}[a_m \beta_n (A_{12} + A_{66})] + T_{mnl}^i (-a_m A_{13}^i) &= w_{mnl}^2 I_1 G_{mnl} \\ H_{mnl}(A_{66} \alpha_m^2 + A_{22} \beta_n^2) + G_{mnl}[a_m \beta_n (A_{21} + A_{66})] + T_{mnl}^i (-\beta_n A_{13}^i) &= w_{mnl}^2 I_1 H_{mnl} \\ J_{mnl}(a_m^2 D_{11} + \beta_n^2 D_{66} + A_{55}) + \rho_{mnl}[a_m \beta_n (D_2 + D_{66})] + T_{mnl}^i \left[a_m (\beta_{55}^i - \beta_{13}^i) \right] &= w_{mnl}^2 I_3 \\ \rho_{mnl}(D_{66} \alpha_m^2 + D_{22} \beta_n^2 + A_{44}) + J_{mnl}[a_m \beta_n (D_{21} + D_{66})] + T_{mnl}^i \left[\beta_n (B_{44}^i - B_{23}^i) \right] &= w_{mnl}^2 I_3 \rho_{mnl} \\ G_{mnl}(-A_{31}^i \alpha_m) + H_{mnl}(-\beta_n A_{32}^i) + J_{mnl}[a_m (B_{55}^i - B_{31}^i) + \rho_{mnl}[\beta_n (B_{44}^i - B_{32}^i)]] + T_{mnl}^j (a_m^2 D_{55}^{ij} & \\ \beta_n^2 D_{44}^{ij} + A_{33}) &= w_{mnl}^2 I_{ij} T_{mnl}^j \end{aligned} \quad (2-4-6)$$

که معادله آخر (n+1) معادله می باشد. با دقت در معادلات فوق الذکر می توان

دریافت که نمایش آنان در فرم ماتریس به صورت زیر می باشد:

$$[A^4][V_{mnl}] = W_{mnl}^2 [I][V_{mnl}] \quad (2-4-7)$$

$$[V_{mnl}] = \begin{Bmatrix} G_{mnl} \\ H_{mnl} \\ J_{mnl} \\ \rho_{mnl} \\ T_{mnl}^i \end{Bmatrix} \quad (2-4-8)$$

و $[A^*]$ و $[I]$ به ترتیب حاوی ضرایب $(T_{mnl}^i, \rho_{mnl}, H_{mnl}, G_{mnl})$ در سمت چپ و راست

تساوی‌های معادلات (2-4-6) می‌باشند

رابطه (2-4-7) نشان دهنده یک مسئله مقدار ویژه عمومی می‌باشد که از حل آن مقدار ویژه ω_{mnl} و بردار ویژه نظیر آن $\{V_{mnl}\}$ حاصل می‌شود. ذکر نکته‌ای راجع به اندیس‌های (n,m,l) حائز اهمیت است. اندیس‌های m و n همان طور که از روابط (2-4-5) پیداست مربوط به جملات کسینوسی و سینوسی حاوی مختصات نقطه می‌باشند هر یک از آنان می‌توانند تمام مقادیر غیر منفی اعداد صحیح را شامل باشند. برای جفت (n,m) مشخص حل معادله (2-4-7) تعداد R مقدار ویژه نتیجه می‌دهد. بنابراین L می‌تواند مقادیر 1 الی R شامل باشند

رابطه تعامد مودها

با توجه به رابطه (2-3-22) و (2-3-52) معادلات حرکت ارتعاشی آزاد ورق کامپوزیت لایه‌ای متقارن به صورت روابط زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_1 \ddot{u}_0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} = I_1 \ddot{v}_0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_y = I_3 \ddot{\psi}_x \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x = I_3 \ddot{\psi}_y \\ \frac{\partial R_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial R_{y1}}{\partial y} - M_{2i} = I_{ij} \ddot{\omega}^i \end{cases}$$

(2-4-9)

با استفاده از روابط (2-3-56) و (2-4-2) نتیجه می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_{mnl} e^{j\omega_{mnl}t} \quad (2-4-10)$$

که

$$(2-4-11)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_{mnl} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u \circ}{\partial x} \\ \frac{\partial v \circ}{\partial y} \\ \frac{\partial u \circ}{\partial y} + \frac{\partial v \circ}{\partial x} \end{Bmatrix}_{mnl} + \begin{Bmatrix} A_{13}^i \\ A_{13}^i \\ 0 \end{Bmatrix} \omega_{mnl}^i$$

این دو با استفاده از روابط (2-3-57) و (2-4-4) می توان نوشت:

$$(2-4-12)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_{mnl} e^{i\omega_{mnl}t}$$

که:

(2-4-13)

$$\begin{Bmatrix} M_{x_{mnl}} \\ M_{y_{mnl}} \\ M_{xy_{mnl}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{00} \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_{x_{mnl}}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{y_{mnl}}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{x_{mnl}}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y_{mnl}}}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{13}^i \\ B_{23}^i \\ 0 \end{Bmatrix} \omega_{mnl}^i$$

با جایگذاری روابط (2-4-4) در رابطه (2-3-58) می توان نتیجه گیری کرد که:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{y_{mnl}} \\ Q_{x_{mnl}} \end{Bmatrix} e^{j\omega_{mnl}t} \quad (2-4-14)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{y_{mnl}} \\ Q_{x_{mnl}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{y_{mnl}} \\ \psi_{x_{mnl}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{44}^i & 0 \\ 0 & \bar{B}_{55}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega_{mnl}^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_{mnl}^i}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2-4-15)$$

و به همین ترتیب با قرار دادن روابط (2-4-4) در (2-3-59) روابط زیر حاصل

می شود

$$\begin{Bmatrix} R_{y_i} \\ R_{x_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{y_{i_{mnl}}} \\ R_{x_{i_{mnl}}} \end{Bmatrix} e^{i\omega_{mnl}t} \quad (2-4-16)$$

که:

$$\begin{Bmatrix} R_{y \ i} \\ R_{x \ i} \end{Bmatrix}_{mnl} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{mnl}^i & 0 \\ 0 & \bar{B}_{55}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{y \ mnl} \\ \psi_{x \ mnl} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44}^{ij} & 0 \\ 0 & D_{55}^{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega_{mnl}^i}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_{mnl}^j}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2-4-17)$$

و بالاخره با جایگزاری روابط (2-4-4) در رابطه (2-3-60) می‌توان رابطه زیر را

نتیجه گرفت:

$$M_{zi} = M_{zi} e^{j\omega_{mnl}t} \quad (2-4-18)$$

که:

$$M_{zi} = \begin{pmatrix} A_{31}^i & A_{23}^i & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{mnl}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{mnl}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{mnl}}{\partial y} + \frac{\partial v_{mnl}}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{31}^i & B_{32}^i & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_{x \ mnl}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{y \ mnl}}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_{x \ mnl}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y \ mnl}}{\partial x} \end{Bmatrix} + \bar{A}_{33}^{ij} \omega_{mnl}^i \quad (2-4-19)$$

با جایگزاری روابط (2-4-4) و (2-4-10) و (2-4-12) و (2-4-14) و (2-4-16)

و (2-4-18) در معادلات (2-4-9) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= -\omega_{mnl}^2 I_1 u_{mnl} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= -\omega_{mnl}^2 I_1 v_{mnl} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{Q_x}{mnl} &= -\omega_{mnl}^2 I_3 \psi_x \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{Q_y}{mnl} &= -\omega_{mnl}^2 I_3 \psi_y \\ \frac{\partial R_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yi}}{\partial y} - \frac{M_{zi}}{mnl} &= -\omega_{mnl}^2 I_{ij} w_{mnl}^j \end{aligned}$$

(2-4-20)

با ضرب اولین و دومین و سومین و چهارمین و پنجمین معادله از دسته معادلات

نتگرال گیری از مجموع w_{pqr}^i و ψ_x و ψ_y و v_{pqr} و u_{pqr} به ترتیب (2-4-20)

آنان روی سطح ورق خواهیم داشت:

(2-4-21)

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) u_{pqr} + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) v_{pqr} + \left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{Q_x}{mnl} \right] \psi_x \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{Q_y}{mnl} \right] \psi_y + \left(\frac{\partial R_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yi}}{\partial y} - \frac{M_{zi}}{mnl} \right) \omega_{pqr}^i \right\} dx dy \\ & = -\omega_{mnl}^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ I_1 (u_{mnl} u_{pqr} + v_{mnl} v_{pqr}) + (\psi_x \psi_x + \psi_y \psi_y) I_3 + I_{ij} \omega_{mnl}^j \omega_{pqr}^i \right\} dx dy \end{aligned}$$

با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء در سمت چپ تساوی (2-4-21) و در نظر گرفتن شرایط مرزی حاصل از روش یافتن معادلات ورق که در بخش چهارم بدست آمدند، می توان نوشت:

(2-4-22)

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ N_{x \ mnl} \frac{\partial u_{\ mnl}}{\partial x} + N_{xy \ mnl} \frac{\partial u_{\ mnl}}{\partial y} + N_{xy \ mnl} \frac{\partial v_{\ mnl}}{\partial x} + N_{y \ mnl} \frac{\partial v_{\ mnl}}{\partial y} + M_{x \ mnl} \frac{\partial \psi_{\ mnl}}{\partial x} + M_{xy \ mnl} \frac{\partial \psi_{\ mnl}}{\partial y} - Q_{x \ mnl} \frac{\psi_{\ mnl}}{pqr} + M_{xy \ mnl} \frac{\partial \psi_{\ mnl}}{\partial x} - M_{y \ mnl} \frac{\partial \psi_{\ mnl}}{\partial y} - Q_{y \ mnl} \frac{\psi_{\ mnl}}{pqr} + R_{xi \ mnl} \frac{\partial \omega_{pqr}^i}{\partial x} - R_{yi \ mnl} \frac{\partial \omega_{pqr}^i}{\partial y} - M_{zi \ mnl} \frac{w_{pqr}^i}{pqr} \right\} dx dy = \omega_{mnl}^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ I_1 (u_{\ mnl} \ u_{\ mnl} \ v_{\ mnl} \ v_{\ mnl}) + I_3 \left(\psi_{\ mnl} \ \psi_{\ mnl} \ + \ \psi_{\ mnl} \ \psi_{\ mnl} \ + \ \psi_{\ mnl} \ \psi_{\ mnl} \right) + I_{ij} w_{mnl}^j w_{pqr}^i \right\} dx dy$$

با جایگذاری روابط (2-4-11) و (2-4-13) و (2-4-15) و (2-4-17) و (2-4-19) در تساوی (2-4-22) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\int_0^a \int_0^b \left\{ \left[A_{11} \frac{\partial u_{\ mnl}}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_{\ mnl}}{\partial y} + \omega_{mnl}^i A_{13}^i \right] \frac{\partial u_{\ mnl}}{\partial x} + \left[A_{66} \frac{\partial u_{\ mnl}}{\partial y} + \frac{\partial v_{\ mnl}}{\partial x} \right] \frac{\partial u_{\ mnl}}{\partial x} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[A_{55} \psi_{x \ mnl} + \bar{B}_{55}^i \frac{\partial \omega_{mnl}^i}{\partial x} \right] \psi_{pqr} + \left[D_{66} \left(\frac{\partial \psi_{x \ mnl}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_{y \ mnl}}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \psi_{pqr}}{\partial y} + \\
& \left[D_{21} \frac{\partial \psi_{x \ mnl}}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \psi_{y \ mnl}}{\partial y} + B_{23}^i w_{mnl}^i \right] \frac{\partial \psi_{pqr}}{\partial y} - \left[A_{44} \psi_{y \ mnl} + \bar{B}_{44}^i \frac{\partial w_{mnl}^i}{\partial y} \right] \psi_{pqr} \\
& + \left[\bar{B}_{55}^i \psi_{pqr} + D_{55}^{ij} \frac{\partial \omega_{mnl}^i}{\partial x} \right] \frac{\partial \omega_{pqr}^i}{\partial x} + \left[\bar{B}_{44}^i \frac{\partial \omega_{mnl}^i}{\partial y} \right] \frac{\partial \omega_{pqr}^i}{\partial y} - \left[A_{31}^i \frac{\partial u_{mnl}}{\partial x} + A_{32}^i \frac{\partial v_{mnl}}{\partial y} + \right. \\
& \left. B_{31}^i \frac{\partial \psi_{x \ mnl}}{\partial x} + B_{32}^i \frac{\partial \psi_{y \ mnl}}{\partial y} + \bar{A}_{33}^{ij} w_{mnl}^j \right] \omega_{pqr}^i \} dx dy
\end{aligned}$$

$$= \omega_{mnl}^2 \int_0^a \int_0^b \left\{ I_1 \left(v_{mnl} \circ u_{par} + v_{mnl} \circ v_{pqr} \right) + I_3 \left(\psi_{x \ mnl} \psi_{x \ pqr} + \psi_{y \ mnl} \psi_{y \ pqr} \right) + I_{ij} w_{xnl}^i w_{pqr}^j \right\} dx dy$$

(2-4-23)

با تبدیل mnl به pqr و بالعکس رابطه (2-4-23) رابطه جدیدی حاصل می‌شود
با کم کردن این رابطه جدید از رابطه (2-4-22) به سادگی مشاهده می‌شود:

(2-4-24)

$$\begin{aligned}
\circ = & \left(w_{mnl}^2 - w_{pqr}^2 \right) \int_0^a \int_0^b \left\{ I_1 \left(u_{mnl} \circ u_{pqr} + v_{mnl} \circ v_{pqr} \right) + I_3 \left(\psi_{x \ mnl} \psi_{x \ pqr} + \psi_{y \ mnl} \psi_{y \ pqr} \right) \right. \\
& \left. + I_{ij} w_{mnl}^i w_{pqr}^j \right\} dx dy
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (2-4-24) می‌توان نوشت:

(2-4-25)

$$\int_0^a \int_0^b I_1 \left(u_{mnl} \circ u_{pqr} \circ + v_{mnl} \circ v_{pqr} \circ \right) + I_3 \left(\psi_{mnl} \psi_{pqr} \psi_{mnl} \psi_{pqr} \right) + I_{ij} \omega_{mnl}^i \omega_{pqr}^j \Big] dx dy =$$

$$\begin{cases} N_{mnl} & (L = r, n = q, m = p) \\ 0 & (L \neq r, n \neq q, m \neq p) \end{cases}$$

که:

(2-4-26)

$$N_{mnl} = \int_0^a \int_0^b I_1 \left(v_{mnl}^2 \circ + v_{mnl}^2 \circ \right) + I_3 \left(\psi_{mnl}^2 \circ + \psi_{mnl}^2 \circ \right) + I_{ij} w_{mnl}^j w_{mnl}^i \Big\} dx dy$$

رابطه (2-4-25) نشان دهنده رابطه تعامد مورهای ارتعاشی آزاد برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای متقارن با زوایای الیاف 0° و 90° می‌باشد با روشی مشابه آنچه شرح داده شده می‌توان رابطه‌ای مشابه برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای در حالت کلی محاسبه نمود.

2-5 تئوری صفحه مرتبه بالاتر (HOPT) Higher order plate theories

فرضیات مورد نظر در این تئوری عبارتند از:

(H₁) کرنش برش عرضی $\varepsilon_{\text{ظ}}$ و ε_{xy} در داخل ضخامت صفحه تغییر شلجمی

شکل دارند و در بالا و ته سطح ناپدید می‌شوند.

(H₂) کرنش عرضی نرمال $\varepsilon_{\text{ظ}}$ در داخل ضخامت صفحه خطوط گوناگونی دارد.

این دو فرض می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varepsilon_1 \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (2-5-1)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varepsilon_2 \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (2-5-2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{3z} \quad (2-5-3)$$

معادله (2-5-3) بدان معنی است که:

$$\omega(x, y, z, t) = \omega_o(x, y, t) + \frac{z^2}{2} \varepsilon_3 \quad (2-5-4)$$

بعد از جایگذاری در معادلات (2-5-2) و (2-5-1) ما داریم

$$u(x, y, z, t) = u_o(x, y, t) + z(\varepsilon_2 - \omega_{o,x}) - \frac{4z^3}{3h^2} \varepsilon_2 - \frac{z^3}{6} \varepsilon_{3x} \quad (2-5-5)$$

$$v(x, y, z, t) = v_o(x, y, t) + z(\varepsilon_2 - \omega_{o,y}) - \frac{4z^3}{3h^2} \varepsilon_2 - \frac{z^3}{6} \varepsilon_{3y}$$

با جایگذاری متغیرهای جدید داریم:

$$\begin{aligned} \psi_x &= \varepsilon_1 - \omega_{o,x} \\ \psi_y &= \varepsilon_2 - \omega_{o,y} \end{aligned} \quad (2-5-6)$$

$$\phi_z = \frac{\varepsilon_3}{2}$$

روابط سینماتیکی استفاده شده بوسیله Hanna و Leissa (1994) عبارتند از:

$$u = z\psi_x - \frac{4z^3}{3h^2}(\psi_x + \omega_{o,x}) - \frac{z^3}{3}\phi_{2,x} \quad (2-5-7a)$$

$$v = z\psi_y - \frac{4z^3}{3h^2}(\psi_y + \omega_{o,y}) - \frac{z^3}{3}\phi_{2,y} \quad (2-5-7b)$$

$$\omega = \omega_o + z^2\phi_z \quad (2-5-7c)$$

اگر کرنش عرضی نرمال نادیده گرفته شود روابط سینماتیکی استفاده شده در

تئوری (HOPT) Reddy (1994) بدست می‌آید:

$$u = u_o + z \left[\psi_x - 4/3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \right] \quad (2-5-8a)$$

$$v = v_o + z \left[\psi_y - 4/3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \quad (2-5-8b)$$

$$\omega = \omega_o \quad (2-5-8c)$$

روابط کرنش تغییر مکان در تئوری (HOPT) عبارتند از:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + z \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - 4/3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2-5-9)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \left[\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - 4/3 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2-5-10)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (2-5-11)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial \omega_o}{\partial y} + \psi_y - 4 \frac{z^2}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad (2-5-12)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x} + \psi_x - 4 \frac{z^2}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (2-5-13)$$

$$(2-5-14)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right]$$

که می‌تواند روابط بالا به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{\circ} + zk_x + z^3 k'_x \quad (2-5-15a)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz}^{\circ} + zk_y + z^3 k'_y \quad (2-5-15b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^{\circ} + zk_{xy} + z^3 k'_{xy} \quad (2-5-15c)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^{\circ} + z^2 k'_{xz} \quad (2-5-15d)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^{\circ} + zk_{xy} + z^3 k'_{xy} \quad (2-5-15e)$$

که در آن:

$$k'_x = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \right) \quad (2-5-16a)$$

$$k'_y = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \right) \quad (2-5-16b)$$

$$k'_{xy} = -\frac{4}{h^2} \left(\psi_y + \frac{\partial \omega_0}{\partial y} \right) \quad (2-5-16c)$$

$$k'_{xz} = -\frac{4}{h^2} \left(\psi_x + \frac{\partial \omega_0}{\partial x} \right) \quad (2-5-16d)$$

$$k'_{yz} = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \omega_o}{\partial x^2} \right) \quad (2-5-16e)$$

برآیندهای تنش N_i و M_i و R_i مشخص می‌شوند با:

$$(N_x, M_x, P_x) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(1, z, z^3) dz \quad (2-5-17a)$$

$$(N_y, M_y, P_y) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}(1, z, z^3) dz \quad (2-5-17b)$$

$$(N_{xy}, M_{xy}, P_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(1, z, z^3) dz \quad (2-5-17c)$$

$$(Q_1, R_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4(1, z^2) dz \quad (2-5-17d)$$

$$(Q_1, R_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5(1, z^2) dz \quad (2-5-17e)$$

و لختی از $]_1$ تا $]_7$ مشخص می‌شود از فرمول:

$$(2-5-18)$$

بنابراین معادلات حرکت برابرند با:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{u} + \bar{I}_2 \ddot{\psi}_x - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial^2 \ddot{\omega}}{\partial x^2} \quad (2-5-19a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = I_1 \ddot{v} + \bar{I}_2 \ddot{\psi}_y - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial^2 \ddot{\omega}}{\partial y^2} \quad (2-5-19b)$$

$$(2-5-19c)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q - \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_y}{\partial y^2} \right)$$

$$(2-5-19d)$$

$$= I_1 \ddot{\omega} - \left(\frac{4}{3h^2} \right)^2 I_7 \left(\frac{\partial^2 \ddot{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\omega}}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3h^2} I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) + \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \left(\frac{\partial \ddot{\omega}_X}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\omega}_Y}{\partial Y} \right)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{4}{h^2} R_x - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) = \bar{I}_2 \ddot{u} + \bar{I}_3 \ddot{\psi}_x - \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \quad (2-5-19e)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{4}{h^2} R_y - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} \right) = \bar{I}_2 \ddot{v} + \bar{I}_3 \ddot{\psi}_y - \frac{u}{3h^2} \bar{I}_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \quad (2-5-20)$$

$$\bar{I}_2 = I_2 - \frac{4}{3h^2} I_4 \quad \bar{I}_5 = I_5 - \frac{4}{3h^2} I_7 \quad \bar{I}_3 = I_3 - \frac{8}{3h^2} I_5 + \frac{16}{9h^4} I_7$$

معادلات اساسی عبارتند از:

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon^o\} \quad (2-5-21)$$

$$\begin{Bmatrix} \{M\} \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] & [F] \\ [F]^T & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{k\} \\ \{k'_y\} \end{Bmatrix} \quad (2-5-22)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \\ R_y \\ R_x \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} A_{44} & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & A_{65} & 0 & D_{55} \\ D_{44} & 0 & F_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} & 0 & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz}^o \\ \varepsilon_{xz}^o \\ k'_{yz} \\ K'_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2-5-23)$$

پیچیدگی تئوری higher-order از این معادله آشکار است. اما با اصلاح آن تا اندازه‌ای کوچک می‌شود اما به هر حال از این تئوری به طور گسترده استفاده نمی‌شود.

2-5-1-1 خمش استاتیکی صفحات

به منظور ارزیابی تأثیر چندین فرضیه در معادله حرکت پیشرفته بررسی خمشی

استاتیکی تکیه گاه ساده، چند سان گرد، صفحات مستطیلی بر طبق دو تئوری کلاسیک صفحه و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده می شود این مثال به خاطر اینکه یک راه حل دقیق که روش ناویر نامیده می شود ارائه می دهد، انتخاب شده است.

بخاطر اینکه هر شیوه راه حل نزدیک و مشابه پیچیده است. دو تئوری می تواند مستقیماً با یکدیگر مقایسه شوند همچنین برای صفحات مستطیل با تکیه گاه ساده در د و ضلع روبروی هم در حالی که هیچگونه پایه ای در دو طرف دیگر نیست یک راه حل وجود دارد که levy-type نامیده می شود.

شرایط مرزی برای صفحات مستطیلی با تکیه گاه ساده به صورت زیر نوشته می شود:

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0 \quad (2-5-24)$$

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = M_x(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \quad (2-5-25)$$

با تئوری کلاسیک صفحه ما تغییر مکان عرضی و بار عرضی را در بسط دو گانه فوریه به صورت زیر بسط می دهیم:

$$W(x, y) = \sum_{m,n}^w W_{m,n} \sin \frac{\omega \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (2-5-25)$$

$$q = \sum_{m,n} q_{m,n} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (2-5-27)$$

با جایگذاری در معادلات (2-25) و (2-5-24) و (2-5-25) مشخص می شود که معادلات تعادل و شرایط مرزی موقعی که ضریب گشاور پیچشی و خمشی صفر

است رضایت بخش و کافی است. $D_{16} = D_{26} = 0$.

با جایگذاری (2-5-26) و (2-5-27) در معادله (2-2-5) و با ضرب کردن همه

در $\sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b}$ و انتگرال گیری بر روی Ω و استفاده از نتایج آن داریم:

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & m \neq m' \\ a/2 & m = m' \end{cases} \quad (2-5-28)$$

عبارت بعدی نتیجه می‌دهد که برای ضرائب در بسط سری دو گانه برای تغییر

مکانهای عرضی داریم:

$$\omega_{mn} \frac{\pi^2}{a^4} [D_{11}m^4 + 2(D_{12} + \omega D_{66})m^2n^2\gamma^2 + D_{22}n^4\gamma^4] = a_{mn} \quad (2-5-29)$$

که $\gamma = \frac{a}{b}$ نسبت ظاهری صفحه است.

با استفاده از معادلات (2-5-26) و (2-5-29) یک راه حل پیدا می‌شود

حالا، امتحان کردن آن بوسیله سه روش مخصوص است. نیروهای متمرکز، بار

تکه‌ای، بار گسترده یکنواخت. موقعی که بار خارجی نیروی متمرکز p است، X_0 و

Y_0 را به کار می‌بریم:

$$q = p\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad (2-5-30)$$

که δ تابع Dirac delta است با ضرب معادله (2-5-30) در $\sin(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b})$

و انتگرال گیری روی Ω داریم:

$$q_{mn} = \frac{4p}{ab} \sin\left(m\pi \frac{x_0}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y_0}{b}\right) \quad (2-5-31)$$

موقعی که p در مرکز $(\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{1}{2})$ به کار می‌رود معادله (2-5-31) نشان

می‌دهد که $q_{mn} = 0$ در صورتیکه m و n زوج باشند. بنابراین در معادله (2-5-29)

$$\omega_{mn} = 0 \quad (2-5-29)$$

و فقط اعداد فرد m و n برای خمش صفحات موثرند. برای فشار یکنواخت q

گسترده بر بالای مرکز قطعه (x_0, y_0) داریم:

$$q_{mn} = \frac{49}{ab} \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_{y_0-\beta}^{y_0+\beta} + \sin \frac{n\pi y}{b} dy \quad (2-5-32)$$

$$a_{mn} = \frac{16}{mn\pi^2} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} \quad (2-5-33)$$

وقتی که $\frac{\alpha}{a}$ و $\frac{\beta}{b}$ هر دو خیلی کوچک باشند و بار کامل به کار گرفته شده بر روی

قطعه $4\alpha\beta q$ است معادله (2-5-33) به (2-5-31) تبدیل می‌شود

مطابق فرمول زیر فشار وارد بر قطعات مستطیلی به اندازه $2\alpha \times 2\beta$ و در مرکز

(x_0, y_0) گسترده است.

$$q(x, y) = q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}(x - x_0)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2\beta}(y - y_0)\right) \quad (2-5-34)$$

پس:

$$q_{mn} = \frac{64p \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \cos \frac{m\pi\alpha}{a} \cos \frac{n\pi\beta}{b}}{ab\alpha^2\beta^2 \left(\frac{m}{a} - \frac{1}{2\alpha}\right) \left(\frac{n}{b} - \frac{1}{2\beta}\right) \left(\frac{m}{a} + \frac{1}{2\alpha}\right) \left(\frac{n}{b} + \frac{1}{2\beta}\right)} \quad (2-5-35)$$

وقتی که $\frac{n}{b} \neq \frac{1}{2\beta}$ و $\frac{m}{a} \neq \frac{1}{2\alpha}$

و موقعی که هر $\frac{m}{a} = \frac{1}{2\alpha}$ و یا $\frac{n}{b} = \frac{1}{2\beta}$ باشد $q_{mn} = 0$ است.

موقعی که فشار گسترده در سرتاسر سطح صفحه به طور یکنواخت به کار رود:

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_{\Omega} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} d\Omega \quad (2-5-36)$$

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (2-5-37)$$

و موقعی که m و یا n زوج باشد $q_{mn} = 0$

با استفاده از FSDT راه حل داده شده به صورت زیر می‌شود:

$$\omega_o = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varpi_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad (2-5-38a)$$

$$\psi_x = \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad (2-5-38b)$$

$$\omega_y = \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad (2-5-38c)$$

با جایگذاری در معادلات حرکت (2-1-37) و (2-1-35) معادله جبری فشرده

برای هر ترکیبی از m و n بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & K_{22} & K_{27} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2-5-39)$$

$$K_{11} = A_{55} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + A_{44} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad K_{12} = A_{55} \frac{m\pi}{a} \quad \text{که}$$

$$K_{13} = A_{44} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \quad K_{22} = D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{66} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + A_{66} \quad (2-5-40)$$

$$(2-5-41)$$

$$K_{23} = D_{12} \frac{mn\pi^2}{ab} + D_{66} \frac{mn\pi^2}{ab} \quad K_{33} = D_{66} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + A_{44}$$

برای هر ترکیبی از (m,n) سیستم سه معادله و سه مجهول (2-5-39) با ضرایب ω_{mn} و X_{mn} و Y_{mn} حل می‌شود با اضافه کردن همه موارد موثر در معادلات (2-5-38) راه حل مسئله بدست می‌آید.

2-6 انتشار امواج هارمونیک

حرکت صفحه‌ای از معادلات (2-1-30) و (2-1-31) پیروی می‌کند و برای صفحات متقارن معادلات بنیادین به صورت روبروست:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u.x \\ v.y \\ u.y + v.y \end{Bmatrix} \quad (2-6-1)$$

و $I_2 = 0$ برای صفحات متقارن و متعادل $A_{16} = A_{26} = 0$ و معادلات حرکت می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$A_{11}v_{.xx} + A_{66}u_{.yy} + (A_{12} + A_{66})v_{.xy} = \rho \ddot{u} \quad (2-6-2)$$

$$A_{22}v_{.yy} + A_{66}u_{.yy} + (A_{12} + A_{66})u_{.xy} = \rho \ddot{v}$$

با در نظر گرفتن انتشار امواج هارمونیک به صورت:

$$u = Ue^{ik(\eta-ct)} \quad v = Ve^{ik(\eta-ct)} \quad (2-6-3)$$

که $\eta = x \cos \phi + y \sin \phi$ و k عدد موجی است و C فاز سرعت می‌باشد

با جایگذاری (2-6-3) و (2-6-2) معادلات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-6-4)$$

$$(2-6-5)$$

$$M_{11} = (A_{11} \cos^2 \phi + A_{66} \sin^2 \phi - \rho C^2) K^2$$

$$M_{12} = (A_{12} A_{66}) K^2 \sin \phi - GS \phi$$

$$M_{22} = (A_{22} \sin^2 \phi + A_{66} \cos^2 \phi - \rho C^2) K^2$$

فاز سرعت دو موج در حال انتشار در یک جهت قطعاً از ابزارهای مبین برای صفر شدن ماتریس M است. معادله (2-6-4) و (2-6-5) نشان می‌دهد که C مستقل از عدد موجی k است. یک موج کششی و یک موج برشی می‌تواند در راستای 0° با فاز سرعت زیر به ترتیب انتشارت یابد

(2-6-6)

$$C^2 = A_{11}/\rho, \quad C^2 = A_{66}/\rho$$

به طور مشابه انتشار امواج برشی، کششی در راستای 90° فاز سرعت زیر را دارند:

$$C^2 = A_{22}/\rho, \quad C^2 = A_{66}/\rho \quad (2-6-7)$$

موقعی که $A_{11} = A_{22}$ یک موج کششی خالص ($u=V$) و موج برشی خالص ($u=-V$) در راستای 45° به ترتیب فاز سرعت زیر انتشار پیدا خواهد کرد:

(2-6-8)

$$C^2 = (A_{11} + A_{12} + 2A_{66})/2\rho, \quad C^2 = (A_{11} - A_{12})/2\rho$$

حالا انتشار امواج عرضی در صفحات کامپوزیتی را بررسی می‌کنیم. برای امواج مستقیم الخط در حال انتشار در جهت مشخص شده به وسیله بردار \bar{n} در راستای

یک زاویه ϕ از محور X تغییر مکان بیان می‌شود با:

$$(2-6-10)$$

$$\omega = Ae^{ik(\bar{n} \cdot \bar{\gamma} - ct)}$$

که در اینجا $\gamma = x\bar{i} + z\bar{j}$ و $n = \cos \phi_i + \sin \phi_g$

با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه (CPT) و با جایگزاری در معادله حرکت (2-

5) رابطه پراکندگی بدست می‌آید:

$$(2-6-11)$$

$$C^2 = \left[D_{11} \cos^4 \phi + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \sin^4 \phi + 4D_{16} \sin \phi \cos^3 \phi + 4D_{26} \sin^3 \phi \cos \phi \right] K^2 / I_1$$

که نشان می‌دهد فاز سرعت متفاوت با جهت انتشار است.

برای صفحات همسانگرد ($D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D, I_1 = \rho h$) و فاز سرعت در

همه جهات به همین صورت است و می‌تواند از فرمول زیر محاسبه شود:

$$(2-6-12)$$

$$C^2 = \frac{D}{\rho h} K^2$$

انتشار موج کوتاه در سرعت‌های (CPT) بنابراین به وسیله تئوری کلاسی صفحه

خیلی بالا شامل لختی دورانی، روابط پراکندگی بدست می‌آید:

(2-6-13)

$$C^2 = \left[D_{11} \cos^4 \phi + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \sin^4 \phi + 4D_{16} \sin \phi \cos^3 \phi + 4D_{26} \sin^3 \phi \cos \phi \right] K^2 / (I_1 + I_3 K^2)$$

همانطور که عدد موجی k بزرگ می شود. فاز سرعت به سمت حد میل می کند:

(2-6-14)

$$C = \left\{ D_{11} \cos^4 \phi + 2(D_{12} + 2D_{66}) \sin^2 \phi \cos^2 \phi + D_{22} \cos^4 \phi + 4D_{16} \sin \phi \cos^3 \phi + 4D_{26} \sin^3 \phi \cos \phi \right\}^{1/2} / I_3$$

بنابراین فاز سرعت امواج خمشی برای طول موج کوتاه پرش می کند. برای انتشار امواج در صفحات قابل تغییر شکل برشی و با در نظر گرفتن امواج هارمونیک به

فرم:

(2-6-15)

$$W = W e^{ik(n-ct)}$$
$$\psi_x = X e^{ik(n-ct)}$$
$$\psi_y = y e^{ik(n-ct)}$$

که W و X و Y دامنه هستند و k عدد موج و C فاز سرعت و $\eta = \bar{\gamma} \cdot \bar{n}$ که

$\bar{\gamma} = \bar{x}i - \bar{y}j$ موقعیت بردار $\bar{n} = \cos \phi \bar{i} + \sin \phi \bar{j}$ بردار واحد در جهت انتشار امواج است

با جایگذاری (2-6-15) در (2-1-37) - (2-1-35) مقدار ویژه مسئله بدست

می آید:

(2-6-16)

$$[a_{ij}] \begin{Bmatrix} W \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = 0$$

ماتریس ضرایب $[a_{ij}]$ مشخص می‌شود به وسیله:

(2-6-17)

$$\begin{aligned} a_{11} &= -K^2(A_{44} \sin^2 \phi + A_{55} \cos^2 \phi + 2A_{45} \sin \phi \cos \phi) + I_1 k^2 C^2 \\ a_{12} &= a_{21} = iK(A_{55} \cos \phi + A_{45} \sin \phi) \\ a_{13} &= a_{31} = iK(A_{44} \sin \phi + A_{45} \cos \phi) \\ a_{22} &= D_{11} k^2 \cos^2 \phi + 2D_{16} K^2 \sin \phi \cos \phi + D_{66} K^2 \sin^2 \phi + A_{55} - I_3 k^2 c^2 \\ a_{23} &= a_{32} = (D_{12} + D_{66}) K^2 \sin \phi \cos \phi + D_{16} K^2 \cos^2 \phi + D_{26} K^2 \sin^2 \phi + A_{45} \\ D_{33} &= D_{22} K^2 \sin^2 \phi + D_{66} K^2 \cos^2 \phi + 2D_{26} K^2 \sin \phi \cos \phi + A_{44} - I_3 K^2 c^2 \end{aligned}$$

که i نشانگر اعداد مختلط $i^2 = -1$ است.

برای جوابهای غیر بدیهی دترمینان ماتریس a_{ij} باید برابر صفر شود. برای هر مقداری از عدد موجی k سه سرعت موج وجود دارد و یا برابر سه مقدار از فرکانس $w=ck$ وجود دارد.

برای امواج بلند ($k \rightarrow 0$) فاز سرعت یکی از امواج به سمت صفر میل می‌کند در حالی که فاز سرعت در موج دیگر تا بی‌نهایت می‌شود. حد فرکانس این دو موج از رابطه زیر بدست می‌آید:

(2-6-18)

$$W^4 I_3^2 - W^2 I_3 (A_{44} + A_{55}) + A_{44} A_{55} - A_{45}^2 = 0$$

این نکته جالب توجه است که به علت نداشتن اطلاعات بهتر G_{13} و G_{23} برابر G_{12} گرفته می‌شود وقتی که $G_{13} = G_{23}$ بنابراین $A_{44} = A_{55}$ و $A_{45} = 0$ و فرم معادله (2-6-18) و حدود فرکانس برابر است با $W^2 = A_{44}/I_3$ وقتی که عدد موج افزایش

پیدا می‌کند، فاز سرعت به یک مقدار ثابت نزدیک می‌شود وقتی که $\phi = 0$ فاز سرعت برای سه موج میل می‌کند به:

$$C^2 = \frac{A_{55}}{I_1} \quad (2-6-19)$$

و برای حل معادله از:

$$c^4 I_3^2 - c^2 I_3 (D_{11} + D_{66}) + D_{11} D_{66} - D_{16}^2 = 0 \quad (2-6-20)$$

وقتی که $\phi = 90^\circ$ فاز سرعت برای سه موج میل می کند به:

$$c^2 = \frac{A_{44}}{I_1} \quad (2-6-21)$$

و برای حل آن داریم:

$$c^4 I_3^2 - c^2 I_3 (D_{22} + D_{66}) + D_{22} D_{66} - D_{26}^2 = 0 \quad (2-6-22)$$

2-7 ارتعاشات آزاد صفحه

در این بخش ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیتی مستطیلی با تکیه گاه ساده با layups متقارن را بررسی می کنیم. و از ضرائب گشتاور پیچشی - خمشی صرف نظر می کنیم. در این مورد با استفاده از تئوری کلاسیک صفحه و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و راه حل دقیق بدست می آید. بنابراین دو تئوری می تواند به طور مستقیم و بدون استفاده از روشهای تقریبی مختلف و یا روش اجزاء محدود مقایسه شود.

راه حل levy-type برای صفحات مستطیلی که در دو ضلع مخالف تکیه گاه ساده دارند در دسترس است.

بر طبق تئوری کلاسیک صفحه برای صفحات با لایه های متقارن بدون گشتاور پیچشی و خمشی ($D_{16} = D_{26} = 0$) ارتعاشات آزاد با معادله زیر معین می شود:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + I_1 \ddot{w} = 0 \quad (2-7-1)$$

برای صفحات مستطیلی با تکیه گاه ساده که در طول چهار ضلع آن قرار دارد، سر فوریه دو گانه:

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn} t} \quad (2-7-2)$$

در معادله حرکت (2-7-1) و شرایط مرز زیر صدق می کند:

$$\begin{aligned} w(0, y, t) = w(a, y, t) = w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0 \\ M_x(0, y, t) = M_x(a, y, t) = M_y(x, 0, t) = M_y(x, b, t) = 0 \end{aligned} \quad (2-7-3)$$

با جایگذاری (2-7-2) در (2-7-1) و ضرب در $\sin(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b})$ و

انتگرال گیری بر روی دامنه تعریف شده به وسیله صفحه، فرکانس طبیعی بدست می آید از:

$$w_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{a^4 I_1} [D_{11} m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \gamma^2 + D_{22} n^4 \gamma^4] \quad (2-7-4)$$

برای صفحات قابل تغییر شکل برشی با تکیه گاه ساده با layups متقارن و نداشتن گشتاور پیچشی - خمشی توابع تغییر مکان

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\ \psi_x &= \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \\ \psi_y &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \gamma_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2-7-5)$$

در شرایط مرزی (2-5-24) صدق می کنند.

با جایگذاری (2-7-5) در معادلات حرکت (2-1-37)-(2-1-35) مقدار ویژه مسئله مشخص می شود.

$$([k] - w_{mn}^2 [M]) \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-7-6)$$

که ماتریس سفتی $[k]$ با معادله (2-5-40) مشخص می شود و ماتریس جرم $[m]$ یک ماتریس قطری است که $[m_{11} = I_1, m_{22} = m_{33} = I_3]$ برای جوابهای غیر بدیهی دترمینان ماتریس $([k] - \omega_{mn}^2 [m])$ باید حذف شود.

فصل سوم

3 مدل‌های ضربه

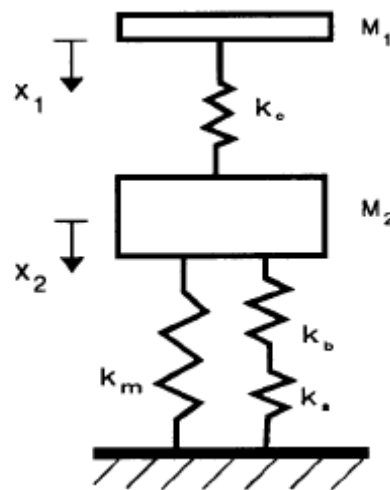
چندین نوع از مدل‌های ریاضی برای مطالعه ضربه روی ساختار استفاده می‌شود. مثلاً برای نمونه، مشخصات نیروی تماسی با هم ارز کردن ساختار با یک مدل جرم فنر به طور دقیق به دست می‌آید. هنگامی که ساختار تقریباً به عنوان یک سازه رفتار کند. در این حالت محاسبه ماکزیمم نیروی تماسی با فرض اینکه نیروی تماسی به بیشترین مقدار خود رسیده امکان پذیر است. جمع انرژی کرنشی در سازه و انرژی موردنیاز برای فرورفتگی مساوی با انرژی جنبشی اولیه پرتابه است. این توازن انرژی هنگامی که یکی از این انرژی‌ها فقط در ماکزیمم مقدار نیروی تماسی حاصل می‌گردد مفید واقع می‌گردد. هنگامی که ساختار از لحاظ دینامیکی باید مورد مطالعه قرار گیرد و مدل‌های دیگر موردنیاز است. در این بخش مدل‌های مختلفی برای تحلیل ضربه عنوان می‌گردد.

3.1 مدل جرم و فنر

مدل‌های جرم - فنر دارای کاربرد ساده‌ای هستند و جواب دقیقی را برای انواع مختلف تست ضربه ارائه می‌دهند. این مدل‌ها (شکل 3.1) شامل دو فنر که نمایانگر استحکام خطی ساختار (K_{bs}) و استحکام غیرخطی پوسته و جرم M_2 که جرم مؤثر ساختار و جرم M_1 که جرم پرتابه است. از دیاگرام آزاد جرم‌های M_1 و M_2 ما

می توان معادله حرکت را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + P &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + K_{bs}x_2 + K_m x_2^3 - P &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$



شکل 1-3 مدل جرم و فنر

P نیروی تماسی است که تابع غیرخطی از $x_1 - x_2$ می باشد که به فرم زیر می توان نمایش داد.

$$P = P(x_1 - x_2) \quad (3.1.2)$$

هنگامی که $x_1 > x_2$ است. چنانچه $x_2 > x_1$ شود $p=0$ می باشد و شرایط اولیه دینامیک سیستم شال موارد زیر می باشد.

$$\ddot{x}_1(0) = V, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0 \quad (3.1.3)$$

این مدل ها به سادگی به یک سیستم یک درجه آزادی تبدیل می گردند با معادله حرکت

$$M\ddot{x} + K_{bs}x = 0. \quad (3.1.4)$$

در این مدل، جرم مؤثر ساختار ناچیز در نظر گرفته شده است. ساختار و پرتابه با هم حرکت می‌کنند ($x_1=x_2=x$)
جواب عمومی معادله (3.1.4)،

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

و هنگامی که $\omega^2 = K_{bs}/M_1$ می‌باشد

مقادیر ثابت A, B از شرایط ابتدائی (3.1.3) بدست می‌آید و در نتیجه

$$x = \frac{V}{\omega} \sin \omega t. \quad (3.1.5)$$

از آنجایی که نیروی تمامی p مساوی با نیروی فنر خطی K_{bs} ، مقدار نیروی تماسی بدست می‌آید.

$$F = K_{bs}x = V(K_{bs}M_1)^{\frac{1}{2}} \sin \omega t \quad (3.1.6)$$

برای $\omega t < \pi$ هنگامی $\omega t > \pi$ (3.1.6) نمایانگر نیروی تماسی منفی می‌باشد که غیرممکن است زیرا تماس بین پرتابه و ساختار یکجانبه می‌باشد. بنابراین جدایی در زمان $t = T_c = \frac{\pi}{\omega}$ اتفاق می‌افتد. و مدت زمان T_c با افزایش جرم پرتابه افزایش می‌یابد و با افزایش استحکام ساختار کاهش می‌یابد.

$$T_c = \pi (M_1/K_{bs})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.7)$$

معادله (3.1.6) نشان می‌دهد که ماکزیمم نیروی تماسی مستقیماً متناسب با سرعت ضربه و با افزایش ریشه دوم استحکام ساختار و جرم پرتابه افزایش می‌یابد. ماکزیمم نیروی تماسی در مقابل انرژی جنبشی اولیه پرتابه در نظر گرفته می‌شود. معادله (3.1.6) نشان می‌دهد که ماکزیمم نیروی تماسی با افزایش انرژی جنبشی افزایش می‌یابد.

3.2 مدل بالانس انرژی

روش دیگر برای آنالیز ضربه، استفاده از فرضیه بالانس انرژی است. انرژی جنبش اولیه پرتابه برای تغییر شکل ساختار به هنگام ضربه استفاده می‌شود. با فرض اینکه ساختار به عنوان سازه عمل می‌کند به هنگامی که ساختار به ماکزیمم مقدار از تغییر شکل رسید، سرعت پرتابه صفر می‌شود و همه انرژی جنبش برای تغییر شکل ساختار استفاده می‌شود و تغییر شکل کلی ساختار شامل تغییر شکل خمشی و تغییر شکل برشی می‌باشد و تغییر شکل نقطه‌ای در منطقه تماس را باید در نظر گرفت بنابراین معادله انرژی بالانس به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{2}MV^2 = E_b + E_s + E_m + E_c \quad (3.2.1)$$

E_b, E_s, E_m نمایانگر برشی و خمش، جزء غشایی و ساختار تغییر شکل یافته است و E_c

$$E_c = \frac{2}{5} n^{-\frac{2}{3}} (K_{bs} W_{\max} + K_m W_{\max}^3)^{\frac{5}{3}}. \quad (3.2.7)$$

با استفاده (3.2.3), (3.2.7), انرژی بالانس بدست می‌آید.

$$(3.2.8)$$

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} K_{bs} W_{\max}^2 + \frac{1}{4} K_m W_{\max}^4 + \frac{2}{5} n^{-\frac{2}{3}} (K_{bs} W_{\max} + K_m W_{\max}^3)^{\frac{5}{3}}.$$

این معادله را می‌توان به صورت عددی برای W_{\max} و ماکزیمم نیروی تماسی که رابطه (3.2.2) بدست می‌آید حل کنیم.

برای بررسی رابطه بین تأثیر خمشی، برش و غشاء و فرورفتگی‌ها در محل تغییر شکل یافته داریم.

$$(3.2.9)$$

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} K_{bs} W_{\max}^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{K_m}{K_{bs}} W_{\max}^2 + \frac{4}{5} \left(\frac{K_{bs} W_{\max}}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 + \frac{K_m}{K_{bs}} W_{\max}^2 \right)^{\frac{5}{3}} \right].$$

با در نظر گرفتن از تأثیر غشائی ($k_m=0$) این رابطه به این فرم نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} K_{bs} W_{\max}^2 \left[1 + \frac{4}{5} \left(\frac{K_{bs} W_{\max}}{n} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (3.2.10)$$

یا در قالب ماکزیمم نیروی تماسی داریم.

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} \frac{P_{\max}^2}{K_{bs}} + \frac{4}{5} \frac{P_{\max}^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.2.11)$$

اگر ما از تأثیر تغییر شکل محلی در نقطه تماس صرف‌نظر کنیم، در نتیجه

$$P_{\max} = V(K_{bs}M)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.12)$$

در این مورد، ماکزیمم نیروی تماسی به طور خطی با افزایش سرعت اولیه پرتابه افزایش می‌یابد.

در موارد خاص ضربه روی قطعه ضخیم، اگر تغییر شکل ساختار قابل صرفنظر کردن باشد، ماکزیمم فرورفتگی هنگامی که انرژی جنبشی پرتابه به طور کامل به ساختار منتقل می‌گردد حاصل می‌گردد پس

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{2}{5}n\alpha^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{5} \frac{F^{\frac{5}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}} \quad (3.2.13)$$

که ماکزیمم نیروی تماسی بدست می‌آید.

$$F = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{5}} (M^3 V^6 n^2)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.2.14)$$

مقدار تقریبی مدت تماس قابل محاسبه می‌باشد، با جابجا کردن استحکام تماس غیرخطی با یک فنر خطی با استحکام

$$k = \frac{F_{\max}}{\alpha_{\max}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{5}} M^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} n^{\frac{4}{3}}. \quad (3.2.15)$$

مدت تماس برابر نصف دوره تناوب ارتعاش آزاد یک سیستم یک درجه آزادی با استحکام k و جرم M .

$$(3.2.16)$$

$$T_c = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi \left(\frac{M}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \pi \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{1}{10}} (M^2 V^{-1} n^{-2})^{\frac{1}{5}}$$

$$= 3.0723 (M^2 V^{-1} n^{-2})^{\frac{1}{5}}.$$

مقدار واقعی مدت تماس با استفاده از معادله انرژی بالانس برای مدت زمان اختیاری t در طول ضربه بدست می‌آید.

$$\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M \dot{\alpha}^2 + \frac{2}{5} n \alpha^{\frac{5}{2}}. \quad (3.2.17)$$

با جابجایی a , t بدست می‌آید.

$$dt = \frac{d\alpha}{(V^2 - \frac{4}{5} M^{-1} n \alpha^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.2.18)$$

مدت تماس دو برابر زمان موردنیاز برای رسیدن به ماکزیمم فرورفتگی می‌باشد.

$$T_c = 2 \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{(V^2 - \frac{4}{5} M^{-1} n \alpha^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.2.19)$$

$$X = \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} = \frac{\alpha}{\left(\frac{5}{4} \frac{M V^2}{n} \right)^{\frac{2}{5}}} \quad \text{با در نظر گرفتن}$$

$$T_c = \frac{2\alpha_{\max}}{V} \int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}} = 2.94 \frac{\alpha_{\max}}{V}$$

$$= 3.2145 (M^2 V^{-1} n^{-2})^{\frac{1}{5}}. \quad (3-2-20)$$

3-3 واکنش تیر برنولی در برابر ضربه

در این قسمت ما یک مثال عینی از مدل کامل برای دینامیک ضربه بیان می‌کنیم. منظور از مدل کامل مدلی که رفتار دینامیکی ساختار را به درستی توضیح می‌دهد. به این معنی که همه مدهای نوسانی که در پاسخ مشترک می‌باشند باید در یک مدل باقی بمانند. برای یک تیر ساده تقویت شده راه حل تحلیلی برای نوسان طبیعی و انواع مد آن می‌تواند پیدا کرد. و جواب گذرا در این حالت مد، توضیح داده می‌شود. این مثال ساده توسط تیموشنکف عنوان گردید. (1913) که به این عنوان که می‌توان توسط یک مدل کامل دینامیک ساختار، دینامیک پرتابه و رفتار تماس را بطور کامل توضیح داد.

جابجایی گذرا تیر به صورت زیر بیان می‌شود.

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t) \phi_j(x). \quad (3-3-1)$$

N تعداد مدهای باقی مانده در مدل دینامیک تیر می‌باشد. که توسط سعی و خطا تعیین می‌شود با جایگزینی (3-3-1) در معادله حرکت، و ضرب در $\phi_1(x)$ و انتگرال‌گیری در طول تیر معادله مدل بدست می‌آید.

$$m_i \ddot{\alpha}_i + k_i \alpha_i = f_i(t) \quad (3-2-2)$$

و استحکام مدل و جرم مدل و نیروی مدل به این صورت تعریف می‌شود:

$$k_i = \int_0^L \phi_{i,xx}^2 dx, \quad m_i = \int_0^L \phi_i^2 dx, \quad f_i(t) = \int_0^L p(x,t) \phi_i(x) dx.$$

و نیروی F متمرکزی در نقطه $x=a$

$$p(x,t) = P(t)\delta(x-a) \quad (3-3-3)$$

$$f_i(t) = P\phi_i(a).$$

و حرکت پرتابه

$$M\ddot{x} + P = 0. \quad (3-3-4)$$

بزرگی نیروی تماسی توسط قانون هرتز بیان می‌گردد

$$P = k_c \langle x(t) - w(a,t) \rangle^{\frac{3}{2}}. \quad (3-3-5)$$

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \quad (3-3-6)$$

ماتریس $[M]$ که یک ماتریس قطری با N عضو m_i که m_i در معادله (3.3.2)

تعریف شده است. و ماتریس قطری بعدی جرم پرتابه است. و ماتریس استحکام

همچنین یک ماتریس قطری می‌باشد.

بردار نیروی شامل N عضو F_i که F_i در معادله (3.2.4) تعریف شده است و p از

معادله (3.3.5) بدست می‌آید. و در زمان $t=0$ نیز در حالت ثابت و جابجایی پرتابه

صفر است بنابراین $\{x(0)\} = 0$ ، سرعت هر نقطه در امتداد تیر صفر است و سرعت

اولیه پرتابه V است.

معادله حرکت (3.3.6) با شرایط اولیه شرح داده شد با تکنیک‌های انتگرالگیری

حل می‌شود.

$$[\tilde{A}]\{X\}_{n+1} = \{\tilde{F}\} \quad (3.3.7)$$

$$[\tilde{A}] = [K] + a_o[M]$$

$$\{\tilde{F}\} = \{F\}_{n+1} + [M]\{a_o\{X\}_n + a_1\{\dot{X}\}_n + a_2\{\ddot{X}\}_n\}$$

$$a_o = \frac{1}{\beta\Delta t^2}, \quad a_1 = a_o\Delta t, \quad a_2 = \frac{1}{2\beta} - 1,$$

$$a_3 = (1 - \alpha)\Delta t, \quad a_4 = \alpha\Delta t. \quad (3.3.8)$$

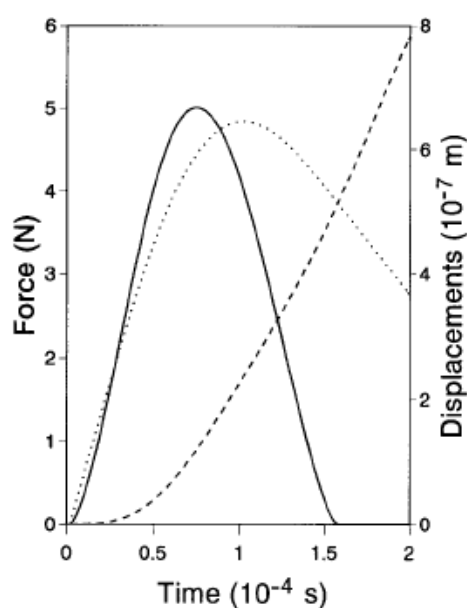
$$\{\ddot{X}\} = a_o\{\{X\}_{n+1} - \{X\}_n\} - a_1\{\dot{X}\}_n - a_2\{\ddot{X}\}_n$$

$$\{\dot{X}\}_{n+1} = \{\dot{X}\}_n + a_3\{\ddot{X}\}_n + a_4\{\ddot{X}\}_{n+1} \quad (3.3.9)$$

$\{F\}$ تابع غیرخطی از جابجایی در پایان مرحله $n+1$ می‌باشد. $\{F\}$ اولین تخمین از جابجایی در مرحله n ام می‌باشد (3.3.6) که برای جابجایی در مرحله $(n+1)$ محاسبه می‌گردد و تخمین جدید $\{F\}$ بدست می‌آید.

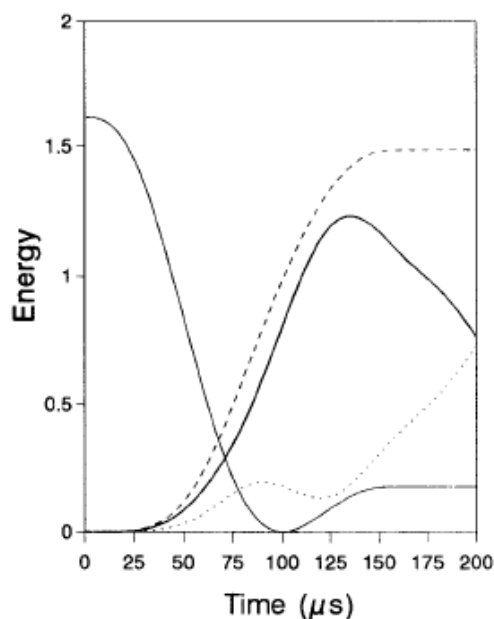
در طول تماس انرژی جنبشی پرتابه کاهش می‌یابد و انرژی جنبشی و کرنشی در جسم هدف افزایش می‌یابد (Fig 3.3) بعد از تماس، انرژی جنبشی پرتابه و مجموع انرژی جنبشی و کرنشی جسم هدف ثابت می‌ماند. بعد از پایان تماس، جسم هدف نوسانات آزاد انجام می‌دهد و انرژی جنبشی و کرنشی در حال تبدیل به یکدیگر می‌باشد و مجموع این دو انرژی ثابت است شکل (3.3). از شکل (3.3) (3.2) می‌توان نتیجه گیری نمود که سرعت پرتابه در هنگامی که نیروی تماسی

به بیشترین مقدار خود برسد صفر نیست و در آن هنگام انرژی جنبشی ذخیره شده در تیر بیشتر از انرژی کرنشی تیر می‌باشد و این نشان می‌دهد که تئوری انرژی - بالانس در مورد این مسئله رضایت بخش نیست. در شکل (3.4) جابجایی تیر در لحظه $t=76\mu\text{s}$ را نشان می‌دهد که نیروی تماسی تقریباً به بیشترین مقدار خود رسیده است.



شکل 2-3 ضربه روی تیر

خط پررنگ: نیروی تماسی ; خط نقطه: جابجایی پرتابه
خط تیره: جابجایی مرکز تیر



شکل 3-3 انرژیهای جنبشی و کرنشی تیر در طول ضربه
 خط نازک: انرژی جنبشی پرتابه؛ خط پررنگ: انرژی جنبشی تیر
 خط نقطه: انرژی کرنشی تیر؛ خط تیره: کل انرژی ذخیره شده در تیر

در بیشتر موارد یک فرم برای جواب عمومی برای جسم هدف وجود ندارد. در این موارد یک راه حل تقریبی استفاده می‌شود. اگر شکل هندسی ساده باشد، روش‌های نظیر روش Reyleigh-Ritz بسیار مؤثر است. و روش عنصر نهایی برای مواقعی که شکل هندسی پیچیده باشد مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مواقعی که جسم هدف توسط معادلات دیفرانسیل حرکت قابل مدل‌سازی باشد، حرکت پرتابه توسط (3.2.19) قابل محاسبه می‌باشد. در این معادلات (3.3.6) ماتریس استحکام و جرم دیگر ماتریس قطری نمی‌باشد.

تعداد مدهای لازم برای یک مدل برای نشان دادن دینامیک ساختار توسط سعی و

خطا تعیین می‌گردد و در حالت پیچیده از راه‌حل‌های تقریبی برای حل مسئله استفاده می‌شود. تعداد درجه آزادی در مدل عنصر نهائی یا تعداد توابع جابجایی در مدهای مختلف برای بالا بردن دقت باید افزایش یابد، به این ترتیب که برای محاسبه دقیق N مد، $2N$ درجه آزادی در مدل لازم است، مسئله دیگر این است که هرچه تعداد مد موجود در پاسخ بیشتر شود، دقت توسط اعتبار تئوری ساختار محدود می‌شود.

3.4 ضربه روی صفحه تکیه گاه ساده براساس تئوری کلاسیک صفحه

برای صفحات مستطیلی؛ راه‌حل ناویر برای بدست آوردن فرم جواب عمومی استفاده می‌شود. برای شرایط هندسی دیگر مدل‌های نوسانی یا روش عنصر نهائی باید استفاده گردد. در بسیاری از موارد که زمان ضربه بسیار ناچیز می‌باشد و صفحه فقط دچار تغییر شکل نقطه‌ای در اطراف نقطه ضربه می‌شود از روشهای تجربی استفاده می‌شود

معادله حرکت ارتروپیک صفحه (2.7.1) مطابق با تئوری کلاسیک صفحه‌ای می‌باشد. شرایط مرزی صفحه مستطیلی (2.7.3) و معادلات حرکت صفحه به هنگامی که تغییر مکان‌ها در داخل یک سری بسط داده شود. رضایت بخش است.

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.4.1)$$

برای نیروی متمرکز در (X_0, Y_0)

$$q = F\delta(x - x_0)\delta(y - y_0). \quad (3.4.2)$$

بعد از جایگذاری در معادلات حرکت، ما برای هر مد داریم

$$\ddot{\alpha}_{mn} + \omega_{mn}^2 \alpha_{mn} = \frac{4F}{abI_1} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \quad (3.4.3)$$

W_{mn} ، نوسان طبیعی، توسط (3.182) بدست می‌آید. N, m به ترتیب از 1 تا p و از 1 تا q در حال تغییر می‌باشد. حرکت صفحه توسط معادله شکل شبیه (3.4.3) توصیف می‌شود.

حرکت ضربه زن توسط (3.3.4) توصیف می‌گردد با نیروی تماسی

$$F = k_c \alpha^{\frac{3}{2}} = k_c (x - w(x_0, y_0))^{\frac{3}{2}} \quad (3.4.4)$$

و شرایط اولیه

$$\begin{aligned} \alpha_{mn}(0) = \dot{\alpha}_{mn}(0) = 0 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = V. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

$N+1$ معادله دیفرانسیل به فرم ماتریس (3.3.6) بدست می‌آید و با انتگرال‌گیری گام به گام حل می‌شود.

3.5 ضربه روی صفحات تکیه گاه ساده براساس تئوری تغییر شکل برش مرتبه اول.

مسئله ضربه روی صفحه براساس تئوری برشی تغییر شکل یافته را می‌توان به روش ساده فرمول‌بندی کرد.

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{m,n=1}^{p,q} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
\psi_x &= \sum_{m,n=1}^{p,q} X_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
\psi_y &= \sum_{m,n=1}^{p,q} Y_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.
\end{aligned}
\tag{3.5.1}$$

با جایگذاری در معادلات حرکت

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{W}_{mn} \\ \ddot{X}_{mn} \\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix} + [k] \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_{mn} = \frac{4F}{abI_1} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}
\tag{3.5.2}$$

ماتریس M, K همان ماتریس (3.184) می‌باشند بنابراین سه معادله برای هر مد جواب در نظر گرفته شده است و حرکت پرتابه توسط (3.3.4) محاسبه می‌گردد.

$$\tag{3.5.3}$$

$$\begin{aligned}
x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = V, \quad w(x, y, 0) = 0, \quad \dot{w}(x, y, 0) = 0, \\
\psi_x(x, y, 0) = \psi_y(x, y, 0) = \dot{\psi}_x(x, y, 0) = \dot{\psi}_y(x, y, 0) = 0.
\end{aligned}$$

ضربه روی صفحه توسط تئوری کلاسیک قابل تحلیل می‌باشد و جواب مسئله با استفاده از روش انتگرال‌گیری گام به گام (Newmark) قابل محاسبه می‌باشد.

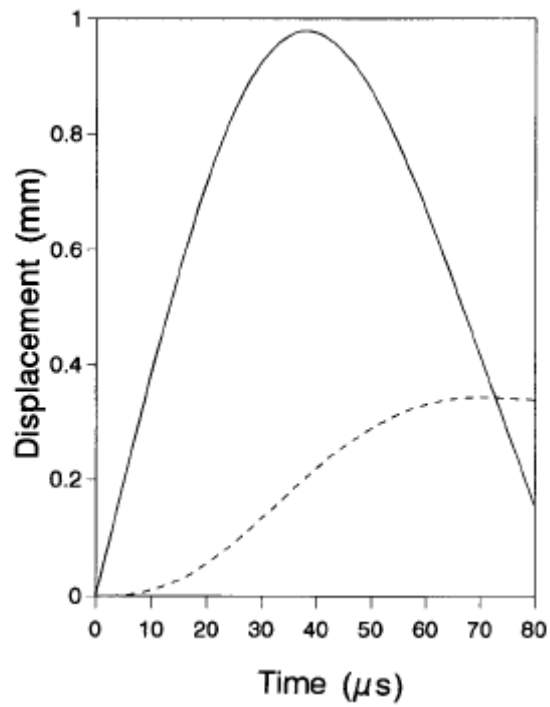
شکل (3.4) تغییر شکل صفحه را به ما نشان می‌دهد و شکل (3.5) سرعت

ماکزیمم مرکز صفحه، 8.77in/s در $t=33\mu\text{s}$ ، به هنگامی که نیروی F تماسی به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد را به ما نشان می‌دهد. بعد از ضربه، سرعت پرتابه 26.198in/s می‌رسد که انرژی جنبشی نهایی پرتابه 44% انرژی جنبشی قبل از ضربه است و 66% انرژی جنبشی پرتابه به صفحه منتقل شده است.

شکل (3.6) تغییر شکل خطی صفحه، $Y/b=0/5$ در زمان $t=33\mu\text{s}$ ، هنگامی که نیروی تماسی به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد و تغییر شکل لبه‌های صفحه بسیار ناچیز می‌باشد را نشان می‌دهد. شکل (3.6) نشان می‌دهد که حداقل در مرحله اول تماس، صفحه در رفتار شبه استاتیک یا مطابق با مد نوسانی آزاد، تغییر شکل پیدا نمی‌کند. شرایط دینامیکی جسم آزمایشی باید به طور دقیق مدل‌سازی شود چون اصطکاک زیادی از انرژی ضربه توسط جسم آزمایشی جذب می‌شود. ما از انرژی بالانس برای پیدا کردن ماکزیمم نیروی تماسی و مدت زمان با صرف‌نظر کردن از تغییر شکل صفحه استفاده می‌کنیم و فرض دوم اینکه با در نظر گرفتن رفتار شبه استاتیکی ساختار، یک مدل فنر با استحکام k در نظر می‌گیریم.

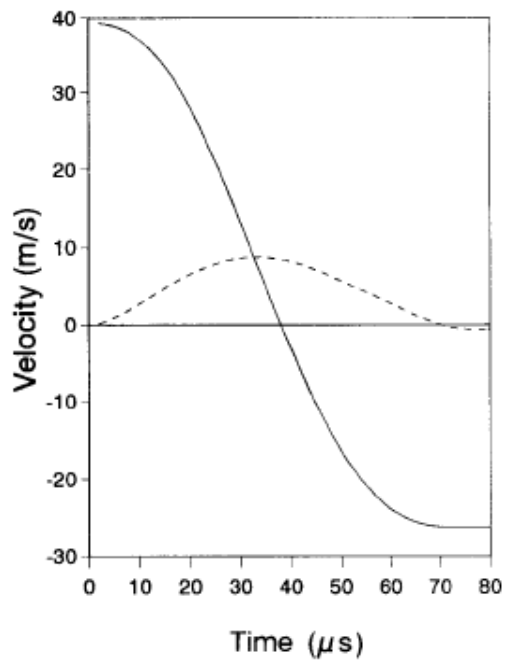
$$k_2 = \frac{Eh^3}{0.0611a^2} \quad (3.5.4)$$

ماکزیمم نیروی تماسی (3.2.14) مقداری ناچیز می‌باشد زیرا که جرم صفحه در مقایسه با جرم پرتابه بسیار بزرگ می‌باشد بنابراین مطابق با اینرسی صفحه در مقایسه با پرتابه، باید نیروی تماس را افزایش داد.

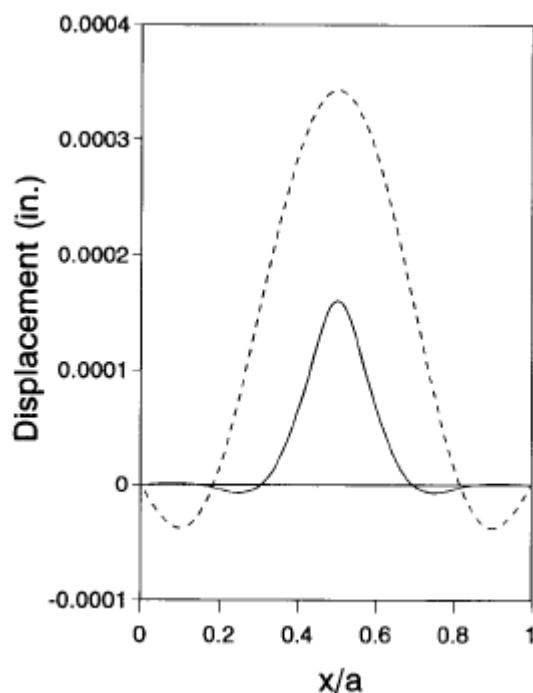


شکل 3-4 ضربه روی صفحه

خط پررنگ : جابجایی پرتابه ؛ خط تیره : جابجایی صفحه در نقطه ضربه



شکل 3-5 ضربه روی صفحه



شکل 6-3 ضربه روی صفحه

جابجایی در طول $y/b=0.5$. خط پررنگ: $t = 33\mu s$ خط تیره $t = 73\mu s$

3.6 جواب تقریبی برای ضربه با موج کنترل شده

جواب تقریبی برای ضربه‌های موج کنترلی توسط السون (1992) ارائه گردید. برای این سری از مسئله‌ها، مدت تماس ضربه به اندازه‌ای کوتاه می‌باشد که صفحه فقط در ناحیه نزدیک محل ضربه تغییر شکل می‌یابد. موج امکان جابجایی از نقطه ضربه به سایر نقاط را به علت کوتاهی زمان را ندارد.

در صفحات ارتروپیک، موج با سرعت‌های مختلف در جهات گوناگون منتشر می‌شود. در آنالیز فرض می‌شود که منطقه تحت ضربه تقریباً به شکل صفحه مستطیلی با طول b, a می‌باشد و هنگامی که مبداء مختصات در مرکز صفحه قرار

گرفت می‌توانیم بنویسیم

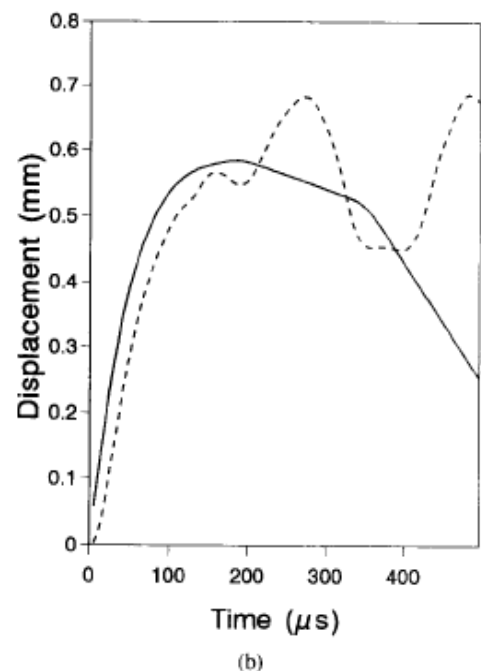
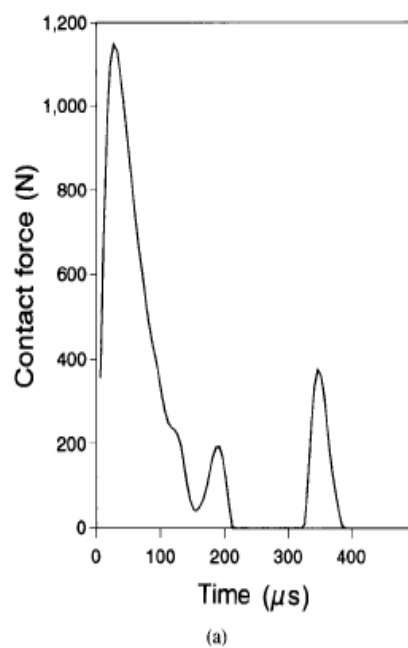
$$W_{jk} = \cos \frac{j\pi x}{a} \cos \frac{k\pi y}{b}. \quad (3.6.1)$$

در پاسخ به نیروی $F(t)$ که در مرکز صفحه اثر می‌کند از معادله زیر استفاده می‌کنیم.

$$w(x, y) = \sum_{j,k=1}^{\infty} W_{jk} \alpha_{jk} \quad (3.6.2)$$

با جایگذاری (3.6.2) و $q=F(t)\delta(x)\delta(y)$ در معادله حرکت کلاسیک صفحه

ارتروپیک و ضرب در W_{jk}



شکل 7-3 ضربه روی 10 صفحات اپوکسی - گرافیت ($v = 10 \text{ m/s}$)

(a) نمودار نیرو

(b) خط پررنگ جابجایی پرتابه ؛ خط تیره : تغییر شکل صفحه

و انتگرال گیری حول ناحیه صفحه داده شده داریم.

$$\ddot{\alpha}_{jk} + \omega_{jk}^2 \alpha_{jk} = \frac{4F}{I_1 ab} \quad (3.6.3)$$

$$\omega_{jk}^2 = \left[D_{11} \left(\frac{j\pi}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 \right] / I_1$$

K_j فرد هستند، هنگامی که k_j زوج باشد سمت راست معادله (3.6.3) صفر

می شود $a_{jk}=0$ بادر نظر گرفتن (3.6.3) در زمان t و ضرب توسط \sin

$[(w_{jk}(t-z))]$ و انتگرال گیری از زمان 0 تا زمان t معادله زیر بدست می آید.

$$\alpha_{jk} = \frac{4}{I_1 ab \omega_{jk}} \int_0^t F(\tau) \sin[\omega_{jk}(t - \tau)] d\tau. \quad (3.6.4)$$

بعد از جانشین در معادله (3.6.2)، جابجایی صفحه در نقطه ضربه برابر با

$$(3.6.5)$$

$$w_1 = \frac{4}{I_1 ab} \int_0^t F(\tau) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{jk}} \sin[\omega_{jk}(t - \tau)] d\tau.$$

از آنجایی که فقط مقدار فرد k_j در سری ها استفاده می شود، فقط نیمی از

انتگرال های متوالی باقی می ماند. سپس

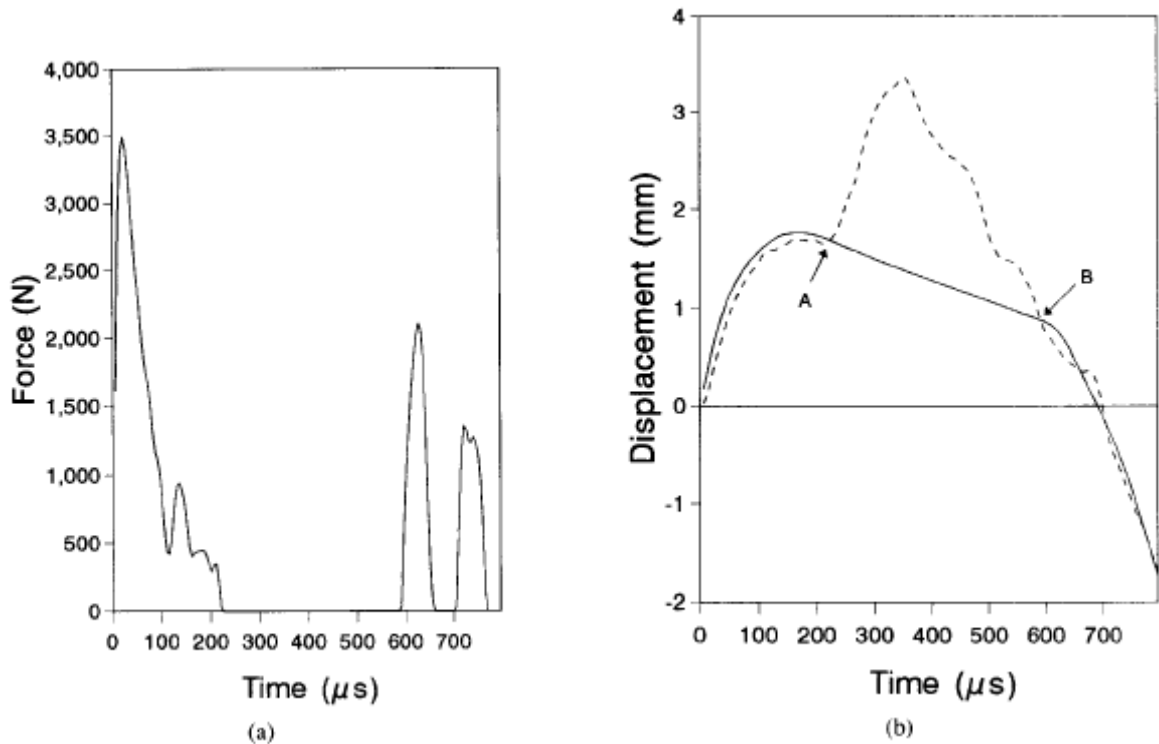
$$w_1 = \frac{1}{mab} \int_0^t F(\tau) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega_{jk}} \sin[\omega_{jk}(t - \tau)] dj dk d\tau. \quad (3.6.6)$$

از (2.6.12) می توان نتیجه گرفت که در جهت X و Y ، $w^2 = \frac{D_{11} K^4}{i_1}$ ، سرعت

$$C_{gx} \frac{dw}{dk} = 2w^{1/2} \left(\frac{D_{11}}{I_1} \right)^{1/4} \quad \text{برابر}$$

و $C_{gy} \frac{dw}{dk} = 2w^{1/2} \left(\frac{D_{22}}{I_1} \right)^{1/4}$ می باشد. طول منطقه تغییر شکل یافته متناسب با سرعت هایشان می باشد.

$$a^2/b^2 = (D_{11}/D_{22})^{1/2}. \quad (3.6.7)$$



شکل 8-3 ضربه روی 20 صفحه اپوکسی_گرافیت ($v = 30 \text{ m/s}$)
 (a) نمودار نیرو
 (b) خط پررنگ جابجایی پرتابه
 خط تیره: تغییر شکل صفحه

پس فرکانس طبیعی بدست می‌آید.

$$ab\omega_{jk} = 2\pi^2(D^*/m)^{\frac{1}{2}}jk$$

$$D^* = \frac{A+1}{2}(D_{11}D_{22})^{\frac{1}{2}}, \quad A = (D_{12} + 2D_{66})/(D_{11}D_{22})^{\frac{1}{2}} \quad (3.6.8)$$

و جابجایی صفحه در محل ضربه برابر با

$$w_1 = \frac{1}{8(I_1 D^*)^{\frac{1}{2}}} \int_0^t F(\tau) d\tau. \quad (3.6.9)$$

با به کار بردن قانون نیوتن، معادله حرکت پرتابه برابر با

$$M\ddot{w}_2 + F = 0 \quad (3.6.10)$$

M جرم پرتابه می‌باشد. بعد از دوبار انتگرال گیری، جابجایی پرتابه برابر با

$$w_2 = Vt - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^\tau F(\tau') d\tau' d\tau \quad (3.6.11)$$

V سرعت اولیه پرتابه است و فرورفتگی صفحه به فرم معادله زیر تعریف می‌شود.

$$\delta + w_1 - w_2 = 0. \quad (3.6.12)$$

با دو دیفرانسیل گیری نسبت به زمان و استفاده از معادله‌های (3.6.9), (3.6.11),

و قانون تماس $F = K_c \delta^{\frac{3}{2}}$, فرورفتگی توسط معادله دیفرانسیل غیرخطی بدست می‌آید.

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{1}{8(I_1 D^*)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3}{2} k_c \delta^{\frac{1}{2}} \frac{d\delta}{dt} + \frac{k_c}{M} \delta^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (3.6.13)$$

K_c استحکام تماس می باشد، که با توجه به مشخصات هدف و فرورفتگی می توان تخمین زد.

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{TV}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad (3.6.14)$$

$$\frac{d^2\bar{\delta}}{d\bar{t}^2} + \frac{1}{8(I_1 D^*)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3}{2} k_c \bar{\delta}^{\frac{1}{2}} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{t}} + \frac{k_c}{M} \bar{\delta}^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (3.6.15)$$

با شرایط اولیه

$$\bar{\delta}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{\delta}(0)}{d\bar{t}} = 1 \quad (3.6.16)$$

$$T = [M / (k_c V^{\frac{1}{2}})]^{\frac{2}{3}}, \quad (3.6.17)$$

$$\lambda = k_c^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}} M^{\frac{1}{3}} / [8(I_1 D^*)^{\frac{1}{2}}]. \quad (3.6.18)$$

نیروی تماسی برابر با

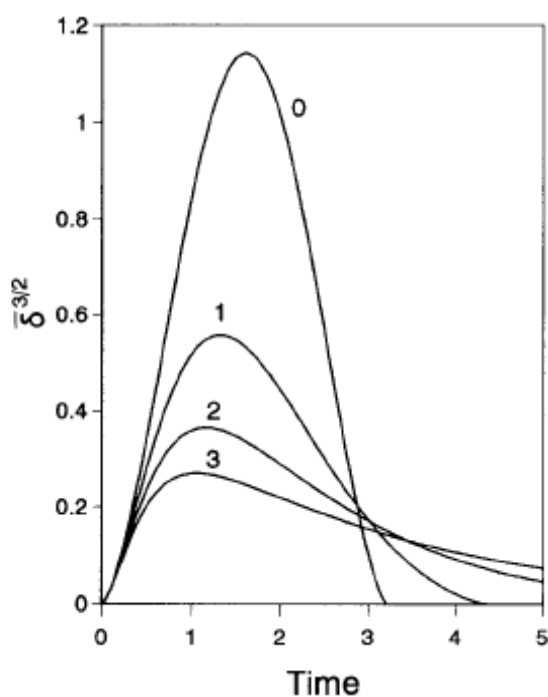
$$F = [k_c^2 M^3 V^6]^{\frac{1}{3}} \bar{\delta}^{\frac{3}{2}} \quad (3.6.19)$$

و جابجایی در محل ضربه برابر با

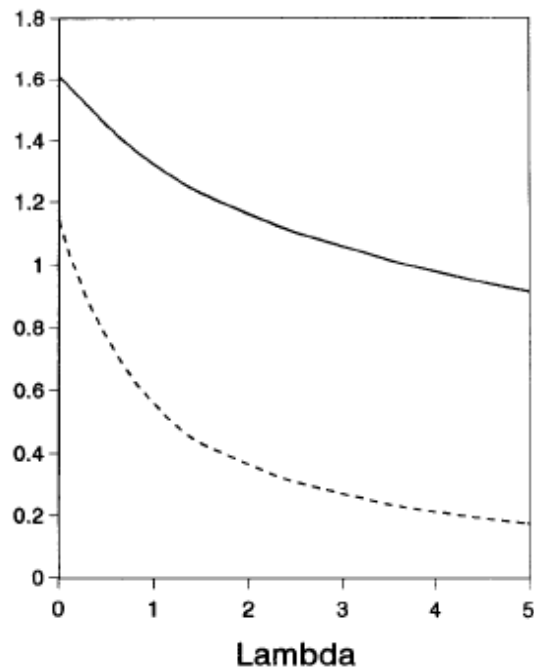
$$w(0, 0, t) = \frac{MV}{8(I_1 D^*)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\bar{t}} \bar{\delta}^{\frac{3}{2}} d\bar{\tau}. \quad (3.6.20)$$

معادله (3.6.15) به طور عددی برای چندین مقدار λ حل می شود و در شکل

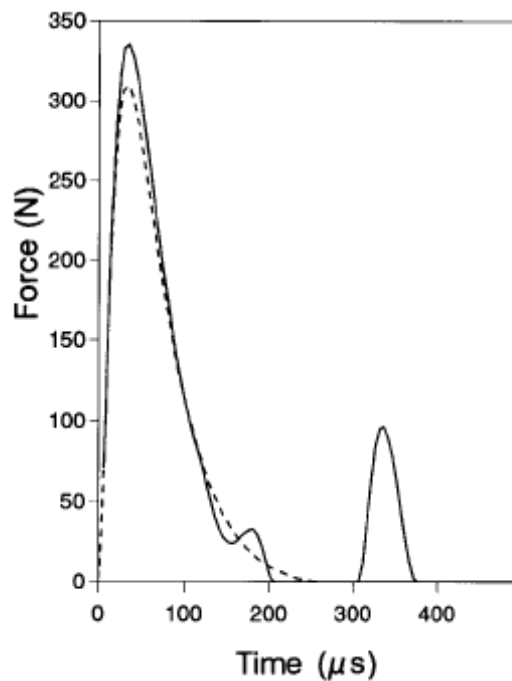
(3.9) آن را نمایش می‌دهیم. بیشترین نیروی تماسی به ازای $\lambda = 0$ به دست می‌آید. هنگامی که پارامتر ضربه افزایش می‌یابد مقدار نیروی تماسی بیشتر می‌شود. ماکزیمم نیروی تماسی و زمان موردنیاز برای رسیدن به ماکزیمم نیروی تماسی به صورت تابعی از λ در شکل 3.10 نشان داده شده است. نتایج به دست آمده از شکل را می‌توان برای تعیین ماکزیمم نیروی ضربه بدون انجام حل استفاده کرد.



شکل 9-3 نمودار نیروی تماسی بر حسب پارامتر λ



شکل 10-3 ماکزیمم نیروی تماسی



شکل 11-3 مقایسه بین نیروی تماسی بدست آمده از روش تقریبی و مدل کامل

ضربه منتقل شده به صفحه برابر $I = \int_0^t F(\tau) d\tau = MV \int_0^t \bar{\delta}^{3/2} d\tau$ هنگامی که $\lambda = 0$ ،

با حل معادله (3.6.15) در بازه زمانی صفر تا زمانی که فرورفتگی به بیشترین

مقدار خود می‌رسد، مقدار $\bar{\delta} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2/5}$ بدست می‌آید. با جایگذاری مقداری

فرورفتگی $\bar{\delta}$ در (3.6.19)، ماکزیمم نیروی تماسی برای ضربه روی نصف مدت

تماس (3.2.9) که قبلاً از روش انرژی بالا نس بدست آمده را بهبود می‌بخشد.

هنگامی که $\lambda > 0$ مقدار فرورفتگی با دوبار انتگرال گیری از معاله (3.6.15) بدست

$$\bar{\delta}^{1/2} = \frac{1}{\lambda} \left[\int_0^{\bar{\delta}} \bar{\delta}^{3/2} dz \right]$$

انتگرال در این عبارت بین 0 تا 1 در حال تغییر است که نسبت بین ضربه عمل

کننده روی صفحه و مومنتم اولیه پرتابه را نشان می‌دهد بنابراین،

$$\bar{\delta}^2 < 1/\lambda \text{ ماکزیمم نیروی تماسی کاهش می‌یابد.}$$

انتگرال گیری عددی از (3.6.15) نشان می‌دهد در شرایط $\lambda = 0, I = 2MV$ ، بعد

از اینکه ضربه کامل شد، کل مومنتم سیستم ثابت می‌ماند و مومنتم پرتابه بعد از

ضربه $-MV$ می‌باشد و سرعت پرتابه $-V$ می‌شود و ما در این مورد ضربه الاستیک

داریم.

و در شرایط $\lambda > 1, I = MV$ ، سرعت برگشتی پرتابه به سمت صفر میل می‌کند و

ضربه بدون قوه ارتجاعی می‌باشد. بیشترین مقدار انرژی جنبش پرتابه توسط هدف

جذب می‌شود.

اگر ضخامت صفحه افزایش یابد، تغییر شکل صفحه به مراتب کمتر می‌شود. برای

$\lambda = 0$ ماکزیمم نیروی تماسی از رابطه $P_{MAX} = 894.8N$ محاسبه می‌گردد، مدت زمان تماس از رابطه (3.2.19) برابر با $T_C = 102.3 \mu S$ می‌باشد. این مورد به ضربه سخت معروف است که نیروی تماسی در حداقل زمان به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

این رهیافت به طور کلی با قانون تماس بیان می‌شود که نیروی تماس برابر

$$F = k_c \delta^a \quad (3.6.21)$$

مطابق با تئوری تماس بین دو جامد الاستیک، برای لایه‌های ماده مرکب، $a = 3/2$ ، برای ساختار ساندویچی، $a = 1$ برای موقعی که تغییر شکل هسته شروع شود.

$$\frac{d^2 \bar{\delta}}{d\bar{t}^2} + \lambda \alpha \bar{\delta}^{\alpha-1} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{t}} + \bar{\delta}^\alpha = 0 \quad (3.6.22)$$

$$T = [M / (k_c V^{\alpha-1})]^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (3.6.23)$$

$$\lambda = [k_c V^{\alpha-1} M^\alpha]^{\frac{1}{\alpha+1}} / [8(mD^*)^{\frac{1}{2}}]. \quad (3.6.24)$$

در تماس هرتز، نتایج بدست آمده از السون مورد قبول می‌باشد. مطابق با قانون تماس خطی (a=1) داریم.

$$\frac{d^2 \bar{\delta}}{d\bar{t}^2} + \lambda \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{t}} + \bar{\delta} = 0 \quad (3.6.25)$$

$$\lambda = \frac{1}{8} \left(\frac{k_c M}{m D^*} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6.26)$$

$$T = (M/k_c)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6.27)$$

معادله (3.6.25) معادله حرکت سیستم یک حرکت درجه آزادی میرا شونده می باشد و ما در مورد $\eta < 1$ مادون میرائی و $\eta > 1$ فوق میرائی بحث می کنیم.

جواب برای مادون میرائی برابر با

$$\bar{\delta} = \frac{e^{-\eta \bar{t}}}{(1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}} \sin[(1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} \bar{t}]. \quad (3.6.28)$$

شکل (3.41) نشان می دهد که هنگامی که دمپینگ افزایش یابد. نیروی تماسی ماکزیمم کاهش می یابد و مدت زمان تماس افزایش می یابد. این پدیده توسط سیستم SDOF توضیح داده می شود.

این سیستم خاصیت صلب از خود نشان می دهد اما هنگامی که سرعت کاهش یافت نیروی مخالف کاهش می یابد و سیستم انعطاف پذیر می گردد و اختلاف بین نمودار بارگذاری و نمودار غیربارگذاری را موقعی که $\eta > 0$ می باشد را بیان می کند. و برای حالت فوق میرائی داریم.

$$\bar{\delta} = \frac{e^{-\eta \bar{t}}}{2(\eta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} [e^{(\eta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \bar{t}} - e^{-(\eta^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \bar{t}}]. \quad (3.6.29)$$

و این جواب برای $\eta = 1.01, 1.5, 2, 4, 6$ در شکل 3-41b نشان داده شده است برای مقادیر زیاد میرایی، نیروی تماسی به ماکزیمم مقدار خود می رسد و سپس

ثابت باقی می ماند.

و هنگامی $n \gg 1$ در حالت فوق میرائی جواب برابر با

$$\bar{\delta} = \frac{1}{2\eta} [1 - e^{-2\eta t}] \quad (3.6.30)$$

ماکزیمم نیروی تماسی از رابطه (3.6.29), (3.6.30) محاسبه می گردد و چنانچه η افزایش یابد نیروی F سریعاً کاهش می یابد و جواب تقریبی از رابطه (3.6.30) برای $n > 3$ صادق می باشد.

3.7 تئوری پیوسته

مسائل اصلی ضربه روی سطوح صاف مورد بررسی قرار می گیرد. در موارد سطوح منحنی دار مدل های ریاضی برای آنالیز تأثیر ضربه روی ساختار باید در نظر گرفته شود. در این قسمت تئوری پیوسته به طور کامل بیان می گردد و سپس برای پاسخ دینامیکی صفحه ساده تقویت شده راه حلی ارائه می گردد. این راه حل برای مسائل ضربه روی مواد مرکب استفاده قرار می گیرد. و برای شکل های هندسی پیچیده و شرایط لایه ای، مدل های مختلف برای مدل ساختار مواد مرکب مورد استفاده قرار می گیرد.

3.7.1 معادلات حرکت

فاصله بین نقاط $(\xi_1, \xi_2, 0)$, $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, 0)$ روی صفحه برابر با

$$(ds)^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = \alpha_1^2 (d\xi_1)^2 + \alpha_2^2 (d\xi_2)^2 \quad (3.7.1)$$

\bar{r} بردار موقعیت نقطه روی صفحه می باشد. بردار \bar{r}_1, \bar{r}_2 مماس بر خط b منحنی می باشند و a به صورت زیر تعریف می شود.

$$\alpha_1^2 = \bar{r}_1 \cdot \bar{r}_1, \quad \alpha_2^2 = \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_2. \quad (3.7.2)$$

مساحت سطح به صورت زیر تعیین می گردد.

$$dA = \alpha_1 \alpha_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.7.3)$$

و بردار واحد برابر با

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_1 \times \bar{r}_2}{\alpha_1 \alpha_2}. \quad (3.7.4)$$

و موقعیت نقطه قرار گرفته در فاصله Z از صفحه به صورت زیر تعریف می شود.

$$\bar{R} = \bar{r} + z\bar{n}.$$

فاصله بین دو نقطه مجزا در نظر گرفته شده برابر با

$$dS^2 = d\bar{R} \cdot d\bar{R} \quad (3.7.5)$$

$$d\bar{R} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} dz.$$

بعد از انتگرال گیری،

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_1} + z \frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_2} + z \frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi_2}. \quad (3.7.6)$$

با استفاده از تئوری (Rodrigues)

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi_1} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi_2} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_2} \quad (3.7.7)$$

ما می‌دانیم

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_1} = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_2} = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_2} \quad (3.7.8)$$

$$(dS)^2 = d\bar{R} \cdot d\bar{R} = L_1^2 (d\xi_1)^2 + L_2^2 (d\xi_2)^2 + L_3^2 (dz)^2 \quad (3.7.9)$$

$$L_1 = \alpha_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right), \quad L_2 = \alpha_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right), \quad L_3 = 1. \quad (3.7.10)$$

برای پوسته‌های نازک، نیرو و مومنتم تعریف می‌شوند به عنوان

$$(N_i, M_i) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i(1, z) dz \quad (3.7.11)$$

$$(Q_1, Q_2) = K_i^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_5, \sigma_4) dz. \quad (3.7.12)$$

اولین تئوری تغییر شکل برشی با فرض اینکه جابجایی تغییر می‌کند بدست می‌آید.

$$u = \frac{L_1}{\alpha_1} u_1 + z\phi_1, \quad v = \frac{L_2}{\alpha_2} u_2 + z\phi_2, \quad w = u_3 \quad (3.7.13)$$

u, v, w جابجایی نقطه دلخواه با مختصات (ξ_1, ξ_2, z) و u_1, u_2, u_3 جابجایی نقطه

دلخواه با مختصات $(\xi_1, \xi_2, 0)$ می‌باشد.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_6 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_4^0, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_5^0$$

(3.7.14)

و کرنش صفحه برابر با

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_3}{R_1}$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_3}{R_2}$$

$$\varepsilon_6^0 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}$$

$$\varepsilon_4^0 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} + \phi_2 - \frac{u}{R_2}$$

$$\varepsilon_5^0 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} + \phi_1 - \frac{u_1}{R_1}$$

(3.7.15)

و انحناء به صورت زیر تعریف می شود.

(3.7.16)

$$\kappa_1^0 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1}$$

$$\kappa_2^0 = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2}$$

$$\kappa_6^0 = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right)$$

معادلات حرکت

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(N_6 + c_0 M_6) + \frac{Q_1}{R_1} &= \left(I_1 + \frac{2}{R_1} I_2\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(I_1 + \frac{I_3}{R_1}\right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}(N_6 - c_0 M_6) + \frac{Q_2}{R_2} &= \left(I_1 + \frac{2}{R_2} I_2\right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(I_1 + \frac{I_3}{R_2}\right) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.7.17)$$

برای تئوری پوسته‌های نازک

$$\phi_1 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \phi_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{u_2}{R_2} \quad (3.7.18)$$

برای لایه‌های بدون کوپلینگ کشش - برش و یا خمش. پیچش

با شرایط مرزی

$$A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = A_{45} = 0 \quad (3.7.19)$$

$$N_1(0, x_2) = N_1(a, x_2) = M_1(0, x_2) = M_1(a, x_2) = 0$$

$$N_2(x_1, 0) = N_2(x_1, b) = M_2(x_1, 0) = M_2(x_1, b) = 0$$

$$u_3(0, x_2) = u_3(a, x_2) = u_2(0, x_2) = u_2(a, x_2) = 0$$

$$u_3(x_1, 0) = u_3(x_1, b) = u_1(x_1, 0) = u_1(x_1, b) = 0$$

$$\phi_2(x_1, 0) = \phi_2(x_1, b) = \phi_1(x_1, 0) = \phi_1(x_1, b) = 0, \quad (3.7.20)$$

$$q = \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right),$$

جواب در فرم زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn}(t) \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \\
u_2(x_1, x_2, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \\
u_3(x_1, x_2, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \\
\phi_1(x_1, x_2, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} X_{mn}(t) \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) \\
\phi_2(x_1, x_2, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} Y_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right).
\end{aligned} \tag{3.7.21}$$

با جایگذاری در معادلات حرکت

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\}$$

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$$

$$\tag{3.7.22}$$

در ابتدا N ، تعداد موده‌های مسئله، انتخاب می‌شود. سپس N معادله به فرم (3.8.22) همراه با $5N+1$ معادله حرکت پرتابه به فرم (3.2.16) انتخاب می‌شود. تماس در سمت راست معادله پدیدار می‌گردد که یک تابع غیرخطی از جابجایی می‌باشد و نیروی تماس با استفاده از تقریب قانون تماس به دست می‌آید. مسائل ضربه همانند مسائل صفحه و تیر با تقریب مناسب حل می‌گردد.

8-3 اندازه‌گیری

در ابتدا لازم است که تست ضربه را روی مدل‌های کوچک تجربه کرد و نتایج به دست آمده از مدل را برای جسم هدف تعمیم داد.

دو روش اصلی برای توسعه قوانین اندازه‌گیری به کار برده می‌شود. اولین روش، روش آنالیز عددی (Buckingham's) می‌باشد و دیگری، نوشتن معادلات حرکت سیستم می‌باشد.

مورتن (1988) قوانین اندازه‌گیری برای تیرهای ایزوتروپیک و همجنس که در معرض ضربه‌های گذرا می‌باشد را تنظیم نمود. 13 پارامتر مشخص نمود. (1) پارامترهای هندسی: b, h, l برای طول و ارتفاع و پهنای تیر، (2) پارامترهای جنسی تیر: مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν (3) مشخصات ضربه زننده 4 شامل V_i, R_i, P_i, E_i, X_i انحراف مرکزی ω ، زمان t . تئوری Buckingham's شامل 10 پارامتر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \pi_1 &= w/h, & \pi_2 &= l/h, & \pi_3 &= b/h, & \pi_4 &= R_i/h, \\ \pi_5 &= E_i/E, & \pi_6 &= \nu, & \pi_7 &= v_i, & \pi_8 &= \rho_i/\rho, \\ \pi_9 &= \rho_i V_i^2/E, & \pi_{10} &= t V_i/h \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

و تابع F به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{10}) = 0. \quad (3.8.2)$$

اگر ابعاد خطی یک مدل نمونه اولیه با فاکتور معمولی S سنجیده شود چهار π - اولیه در مدل یکسان می‌باشند. اگر با جنس یکسان استفاده می‌شود. چهار π بعدی هم ثابت باقی می‌ماند. از آنجایی که جنس مدل و نمونه اولیه یکسان باشند سرعت ضربه زننده ثابت می‌ماند و

$$\left(\frac{tV_i^2}{h}\right)_m = \left(\frac{t'V_i^2}{sh}\right)_p \quad (3.8.3)$$

معادله (3.8.3) نشان می‌دهد که زمان باید در مدل مدنظر گرفته شود. اگر نمونه اولیه بعد از زمان t به ماکزیمم تغییر شکل برسد، مدل بامقیاس یک دهم در زمان $0.1t$ به ماکزیمم تغییر شکل می‌رسد. برای یک تیر ممکن است یک مدل قیاسی بسازیم و نتایج حاصل از آن برای نمونه اولیه با اندازه‌های واقعی جسم در مقابل ضربه را تخمین بزنیم. اگر مواد دارای یک نرخ مثبت کرنشی باشند.

$$\sigma = E(\epsilon + \tau\dot{\epsilon}) \quad (3.8.4)$$

T پارامتر انعکاس نرخ مثبت کرنشی مواد می‌باشد و یک پارامتر بی‌بعد جدید فرض می‌شود.

$$\pi_{11} = t/\tau. \quad (3.8.5)$$

اگر مواد یکسان در مدل و نمونه اولیه استفاده شود، شرایط مشابه بدست می‌آید.

$$t = t'. \quad (3.8.6)$$

این شرایط جدید با شرایط پیشین در معادله (3.8.3) مغایرت دارد بنابراین مدل‌های اندازه‌گیری برای هنگامی که از مواد با حساسیت بالا استفاده می‌شود نمی‌توان به کار برد، خوشبختانه، در موارد معمولی مورد استفاده تأثیر نرخ کرنشی در طول ضربه ناچیز می‌باشد.

آقای مورتن (1988) نشان داد چطور برای این قوانین برای تیرها با جنس اپکسی -
 گرافیت کاربرد دارد. معادلات حرکت برای صفحات متقارن لایه‌ای ارتروپیک عبارت
 است از:

$$A_{55} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{44} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q = I_1 \ddot{w} \quad (3.8.7a)$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I_3 \ddot{\psi}_x \quad (3.8.7b)$$

$$(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = I_3 \ddot{\psi}_y \quad (3.8.7c)$$

$$(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y \partial x} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} - A_{44} \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = I_3 \ddot{\psi}_y$$

معادلات (3.8.7) به رفتار مدل و نمونه اولیه حاکم می‌باشد و با فرض اینکه

$$T_p = \lambda T_m \quad (3.8.7)$$

T_p یک متغیر مستقل برای نمونه و T_m یک متغیر وابسته برای مدل می‌باشد.

λ فاکتور اندازه برای متغیر می‌باشد. با فرض اینکه مواد یکسان برای مدل و نمونه به

کار می‌رود، معادلات حرکت عبارتند از

$$c_1 D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + c_2 (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y \partial x} + c_3 D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - c_4 A_{55} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = c_5 I_3 \ddot{\psi}_x \quad (3.8.9)$$

$$c_1 = \lambda_h^3 \lambda_{\psi_x} / \lambda_x^2, \quad c_2 = \lambda_h^3 \lambda_{\psi_x} / \lambda_y^2, \quad c_3 = \lambda_h^3 \lambda_{\psi_y} / (\lambda_x \lambda_y),$$

$$c_4 = \lambda_h \lambda_{\psi_x}, \quad c_5 = \lambda_h \lambda_w / \lambda_x, \quad c_6 = \lambda_\rho \lambda_h^3 \lambda_{\psi_x} / \lambda_t^2.$$

(3.8.10)

شرایط لازم برای شبیه‌سازی بین مدل و نمونه اولیه باید

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6. \quad (3.8.11)$$

و در نتیجه

$$\lambda_x / \lambda_y = 1, \quad \lambda_{\psi_x} / \lambda_{\psi_y} = 1, \quad \lambda_x / \lambda_h = 1,$$

$$\lambda_w / (\lambda_h \lambda_{\psi_x}) = 1, \quad \lambda_\rho \lambda_h^2 / \lambda_t^2 = 1.$$

(3.8.12)

از معادلات حرکت (3.8.7b,c) نتیجه می‌گیریم

$$\lambda_y / \lambda_y = 1, \quad \lambda_w / (\lambda_h \lambda_{\psi_y}) = 1, \quad \lambda_\rho \lambda_x / \lambda_w = 1. \quad (3.8.13)$$

از تشابه کرنشی داریم

نیروی ضربه حاصل از تماس فشاری برابر است با

$$F(t) = \int_A q \, dx \, dy. \quad (3.8.14)$$

در، $\lambda_b = 1$ ، اگر سطح تماس متناسب با λ^2 باشد، نیروی تماس F متناسب با λ^2 می

شود. در نتیجه انرژی ضربه و جرم ضربه زدن متناسب با λ^3 می‌شود پس باید

سرعت ضربه ثابت باشد.

فصل 4

4 خسارت ضربه با سرعت کم

در این فصل خسارت حاصل از ضربه توسط جسم خارجی روی صفحات لایه‌ای و فاکتورهای اثرکننده روی ضربه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

روش‌های بررسی متفاوت ضربه در فصل بعدی بیان می‌شود و تأثیر خسارت ضربه بر روی استحکام و خستگی، مشخصات دیگر در فصل‌های بعد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در این فصل تکنیک‌های مخرب و غیرمخرب برای بررسی خسارت ضربه و محل ضربه در ساختار مورد بررسی قرار می‌گیرد. و برخی روش‌ها دارای استفاده عمومی و دیگر روش‌ها دارای محدودیت خاص می‌باشند. تکنیک‌های تجربی بسیاری برای مشاهده خسارت ناشی از ضربه توسعه یافته‌اند.

پی بردن به مراحل خسارت اولیه ضربه و رشد آن و شناسایی پارامترهای مهم که در مدل‌های ریاضی تأثیرگذار می‌باشند بسیار اهمیت دارد.

مدل‌های کیفی توضیحات قابل شهودی برای مشاهده الگو خسارت فراهم می‌کنند.

4-1 تست‌های ضربه

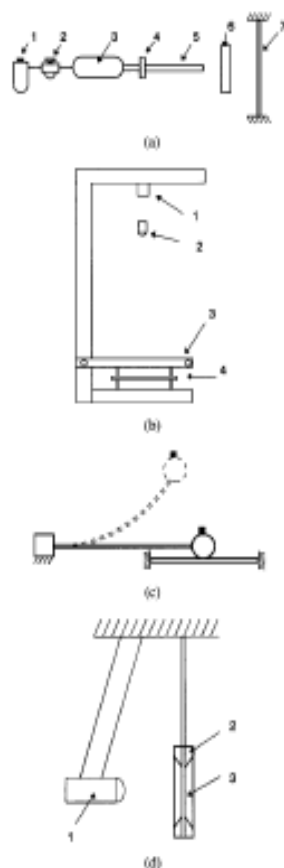
برای شبیه‌سازی ضربه واقعی توسط یک جسم، یک سری از تستها (جدول 4.1)

پیشنهاد شده است. انرژی جنبشی اولیه پرتابه یک پارامتر مهم می‌باشد و اما فاکتورهای دیگری بر پاسخ ساختار تأثیرگذار می‌باشند. جرم بزرگ با سرعت اولیه کم نمی‌تواند خسارتی برابر با جرم کوچک با سرعت اولیه زیاد داشته باشد، حتی اگر انرژی جنبشی یکسان داشته باشند. ضربه شاید بر کل ساختار تأثیر بگذارد، در حالیکه در مواقعی ضربه فقط در نقطه برخورد تأثیرگذار باشد. بنابراین انتخاب مراحل تست باید به دقت انتخاب گردد تا شرایط آزمایشی با شرایط واقعی متناسب باشد.

دو نوع تست بیشتر توسط مهندسان مورد استفاده قرار می‌گیرد، مطالعات تجربی کمک می‌کند تا موقعیت واقعی تحت شرایط کنترلی منعکس گردد. برای مثال هواپیما به هنگام برخاستن و نشست، آت و اشغال روی باند باعث خسارت به هواپیما می‌شود. و این وضعیت، پرتابه با سرعت بالا، با تفنگ گازی قابل شبیه‌سازی می‌باشد. موضوع بعدی، ضربه روی ساختار مواد مرکب توسط پرتابه‌ای با سرعت کم می‌باشد، که می‌توان توسط انداختن جرم روی ساختار شبیه‌سازی کرد.

جدول 4-1 لیست مقالاتی که تستهای ضربه را توضیح می دهد

Gas gun
 Cantwell and Morton (1985b)
 Dan-Jumbo et al. (1989)
 Delfosse et al. (1993)
 Hong and Liu (1989)
 Hussman et al. (1975)
 Jenq et al. (1992)
 Jenq et al. (1994)
 Liu (1988)
 Malvern et al. (1987, 1989)
 Qian and Swanson (1989)
 Sharma (1981)
 Takamatsu et al. (1986)
Dropweight
 Ambur et al. (1995)
 Cantwell et al. (1986)
 Curtis et al. (1984)
 Levin (1986)
 Schoepner (1993)
 Tsai and Tang (1991)
 Wu and Liao (1994)
Pendulum
 Buynak et al. (1988)
 Sjoblom and Hwang (1989)



شکل 4-1 (a) تفنگ گازی شامل (1) فیلتر هوا (2) کنترل کننده فشار (3) تانک هوا (4) دریچه

(5) لوله (6) سنسور سرعت (7) جسم نمونه (b) تست ضربه بوسیله
وزنه (1) آهنربا، (2) وزنه
(3) نگهدارنده (4) جسم نمونه (c) وزنه یکسر درگیر (d) تست کننده اونگی (1)
(وزنه (2) نگهدارنده
جسم نمونه (3) جسم نمونه

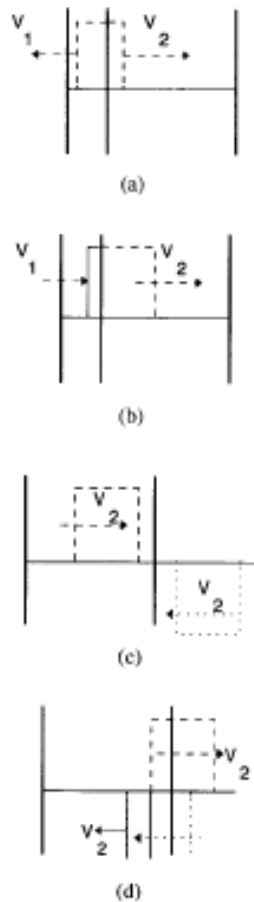
انواع مختلفی از دستگاه‌ها در جدول 1-4 توضیح داده شده است، اما شکل‌های
تفنگ گازی (4.1.a) به طور کامل آورده شده است و با فشار زیاد و توسط یک
کنترل کننده فشار به داخل مخزن هوا منتقل می‌شود سپس توسط یک دریچه هوا
آزاد شده و باعث می‌شود پرتابه در ضمن برخورد به سنسور سرعت به سمت هدف
شلیک شود. تغییر موقعیت پرتابه نسبت به سنسور سرعت باعث تولید سیگنال و به
واسطه این تغییر سیگنال می‌توان سرعت پرتابه را محاسبه کرد و روش دیگر برای
محاسبه سرعت پرتابه توسط مورتن و کنت وال (1985c) ارائه گردید به این
طریق که دو سیم بین فاصله ثابتی در طول لوله تفنگ قرار می‌دهند و مدت زمان
لازم برای عبور بین این دو سیم برای محاسبه سرعت پرتابه استفاده می‌شود.

و در دستگاه بعدی که در شکل 4.1 نشان داده شده است شامل یک پرتابه سنگین
که از ارتفاع رها می‌شود و یک ضربه بر روی نمونه آزمایشی وارد می‌کند و اسکوپنر
(1993) یک سیستم که شامل یک نمونه آزمایشی که در معرض نیروی کنترلی
بود را تشریح کرد.

و سیستم پاندوم برای تولید ضربه با سرعت کم به کار برده می‌شود. (شکل 4.1) و

سیستم پاندوم شامل یک توپ سنگین که به انتهای ریسمانی بسته شده است و سیستم فشار هاپکینسون نیز به عنوان یک تکنیک به کار برده می‌شود. لا (1983a,b,1984) از یک میله طره‌ای شکل که یک کره با قطر 1 اینچ به انتهای آن وصل شده و که با حرکت دادن به سمت عقب و آزاد کردن آن تولید ضربه می‌نماید.

به هنگام برخورد پرتابه جسم هدف در نقطه تماس موج فشاری، موج برشی، موج طولی تولید می‌گردد که به سمت خارج از نقطه تماس حرکت می‌کند. در ضربه با سرعت کم، خسارت مهمی در مراحل اولیه ضربه به وجود نمی‌آید. و سطح تنش پایین است و موج‌های زیادی در طول جسم به مرور زمان نفوذ می‌کنند و باعث تغییر شکل جسم هدف می‌شوند.



شکل 2-4 تنشهای وارد بر صفحه مورد آزمایش

و در ضربه با سرعت بالا، موجهای فشاری می‌تواند تنش‌های کشی بزرگی بوجود آورند که در سطح بیرونی نمونه آزمایش باعث ایجاد خسارت گردند. و در روش صفحات نازک، یک صفحه نازک توسط شلیک یک فویل آلومینیومی به حرکت در می‌آید و صفحه نازک با برخورد به نمونه آزمایشی تنش‌های فشاری تولید می‌کند که این تنش‌ها با سرعت V_1 به سمت چپ و با سرعت V_2 به سمت راست (شکل 4.2) حرکت می‌کنند بعد از اینکه موجهای فشاری در صفحه نازک به لایه مرزی

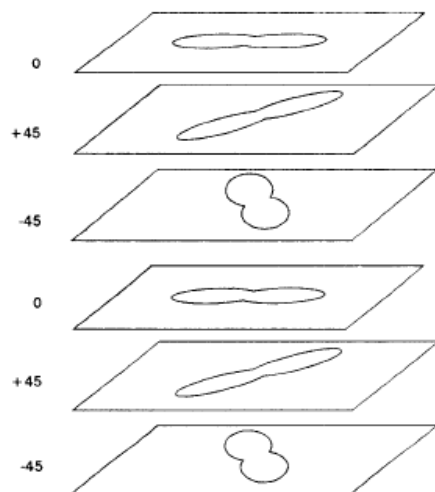
$t = \frac{h_1}{V_1}$ رسید، تنش‌ها در صفحه نازک برابر مجموع موج‌های فشاری و موج‌های کشی، که به سمت راست با سرعت V_1 حرکت می‌کردند. (4.2b) و در زمان $2t_1$ ، بین دو انتها تماس رخ می‌دهد و بنابراین دوره تناوب پالس فشاری در نمونه آزمایشی برابر با t_1 می‌باشد و پالس فشاری در زمان $t_2 = h_2/v_2$ به سطح بیرونی نمونه آزمایشی می‌رسد و بعد از t_2 تنش‌ها در نمونه آزمایشی برابر مجموع پالس فشاری منتشر شده به سمت راست به علاوه پالس کشی به همان مقدار اولیه که بعد از زمان t_2 به سمت چپ حرکت می‌کند. اگر تنش‌های کششی از استحکام تسلیم لایه‌ها بیشتر باشد باعث ایجاد خسارت به لایه‌ها می‌گردد.

4-2 انواع مدل در خسارت ضربه با سرعت کم

4-2-1 شناخت خسارت در ضربه با سرعت کم

در ضربه‌هایی که به طور کامل در هدف نفوذ نمی‌کند آزمایشات نشان می‌دهد که خسارت شامل لایه لایه شدن، ترک ماتریس و پاره‌گی تارها می‌باشد. و لایه لایه شدن عبارت از جدا شدن لایه‌های مجاور از یکدیگر می‌باشد که در اثر کاهش استحکام لایه‌ها رخ می‌دهد. مطالعات تجربی نشان می‌دهد که لایه لایه شدن در بین لایه‌های داخلی که دارای جهت‌های مختلفی می‌باشد، رخ می‌دهد. اگر دو لایه مجاور دارای الیاف هم جهت باشند لایه لایه شدن در بین آنها رخ نمی‌دهد. در ضربه بر روی لایه‌ها با الیاف غیرهمجهت، سطح لایه لایه شدن دارای شکل

مستطیلی می باشد، که محور اصلی آن هم جهت الیاف لایه پایینی آن قرار دارد،
 در شکل 4.3 انواع مختلف لایه لایه شدن را نشان می دهد.



شکل 3-4 جهتگیری عیوب در بین لایه ها

Avery and Grande (1990)	Leach et al. (1987)
Bouadi et al. (1992)	Liu (1987, 1988)
Cantwell (1988a,b)	Malvern et al. (1987, 1989)
Cantwell and Morton (1984b, 1989b,c, 1991)	Marshall and Bouadi (1983)
Cantwell et al. (1986, 1991)	Minguet (1993)
Caprino et al. (1984)	Moon and Shively (1990)
Choi and Chang (1992)	Morton and Godwin (1989)
Choi et al. (1990)	O'Kane and Benham (1986)
Curtis and Bishop (1984)	Peijs et al. (1990)
Davies et al. (1994)	Pelstring (1989)
Dempsey and Horton (1990)	Phillips et al. (1990)
Demuts and Sharpe (1987)	Poe (1990)
Dobyns (1980)	Ramkumar and Thakar (1987)
Dorey (1987)	Rhodes et al. (1981)
Dorey et al. (1978, 1985)	Sierakowski (1991)
Evans and Alderson (1992)	Sierakowski et al. (1976)
Gandhe and Griffin (1989)	Sjoblom and Hwang (1989)
Ghaffari et al. (1990)	Smith and Yamaki (1990)
Ghasemi Nejhadi and Parvizi-Majidi (1990)	Spamer and Brink (1988)
Gong and Sankar (1991)	Srinivasan et al. (1991, 1992)
Gottesman et al. (1987)	Strait et al. (1992b)
Grady and Meyn (1989)	Swanson (1992, 1993)
Griffin (1987)	Takeda et al. (1981a)
Hong and Liu (1989)	Verpoest et al. (1987)
Hull and Shi (1993)	Wang and Khanh (1991)
Kumar and Narayanan (1990)	Williams and Rhodes (1982)
Kumar and Rai (1991)	Wu and Liao (1994)
Lal (1982)	Wu and Springer (1988a)

جدول 2-4 رابطه بین اندازه عیب و انرژی ضربه

سطح لایه لایه شده معمولاً متناسب با انرژی جنبشی ضربه زن می باشد. (جدول 4.2) بعد از یک مقدار آستانه، اندازه لایه لایه شدن متناسب با انرژی جنبشی به صورت خطی تغییر می کند که سطح لایه لایه شدن توسط التراسونیک عکس برداری می شود و منطقه خسارت دیده تحت تأثیر تعداد لایه ها می باشد به طوری که انرژی جنبشی لایه های مختلف با همدیگر متفاوت می باشد. یک نمودار ساده برای همه لایه ها جز از تعداد لایه برای هر مواد به دست می آید. مطالعات مختلف نشان می دهد هنگامی که نیروی تماس به یک مقدار معین که برای تست های استاتیکی و تست ضربه با سرعت کم یکسان می باشد می رسد خسارت شروع می شود. مطالعات انجام گرفته شده توسط sjablom and hwang (1989)

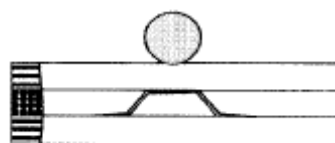
برای $s[-45,45,9009,45,-45,0,0]$ کامپوزیت گرافیتی نشان می‌دهد که خسارت وارده بر کامپوزیت بعد از یک مقدار مشخص نیرو ضربه جزا از مقدار انرژی جنبشی پرتابه شروع به افزایش می‌کند.

Sjblom (1989) یک مدل ساده برای توضیح چگونگی تغییر نیروی ابتدایی متناسب با پارامترها و ضخامت لایه‌ها ارائه داد. که D قطر فرورفتگی و نیروی تماس P که یک منطقه تماس با شعاع $r = (Da)^{1/2}$ بوجود می‌آید که فرورفتگی α متناسب با p و k_c استحکام تماس می‌باشد. تنش برشی عرضی فرض می‌شود که به طور یکنواخت بر روی یک استوانه به شعاع r و ارتفاع h وارد می‌شود و هنگامی که تنش برشی به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد پاره‌گی رخ می‌دهد با توجه به این فرضیات نیروی اولیه توسط معادله زیر بدست می‌آید.

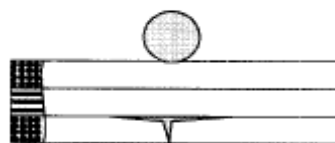
$$P = (2\pi h \tau_{\max})^{\frac{3}{2}} D^{\frac{3}{4}} k_c^{-\frac{1}{2}} \quad (4.1.1)$$

بعد از ضربه، ترک‌های ماتریس در یک تقسیم‌بندی کامل قرار می‌گیرند و مراحل خسارت در ابتدا با ترک در ماتریس شروع می‌شود و سپس منجر به لایه لایه شدن در لایه‌های میانی می‌شود. دو نوع ترک ماتریس مشاهده می‌شود (1) ترک کششی و (2) ترک برشی (شکل 4.4). ترک کششی هنگامی بوجود می‌آید تنش‌های نرمال در صفحه از استحکام کششی عرضی صفحه بیشتر شوند و ترک‌های برشی بیان می‌کنند که تنش‌های برشی عرضی یک نقش مهمی را در شکل‌گیری ترک برشی

ایفا می‌کند. در لایه‌های ضخیم، ترک ماتریس در ابتداء در اولین لایه نزدیک به ضربه بخاطر شدت و موقعیت تنش‌های تماسی رخ می‌دهد. پیشرفت تدریجی خسارت از بالا به پایین، یک شکل درختی را نتیجه می‌شود (شکل 4.5a). در لایه‌های نازک، تنش‌های خمشی در پشت لایه‌ها، ترک ماتریس در لایه‌های پایینی را منجر می‌شود که یک نوع از ترک ماتریس را که عکس‌الگوی درختی می‌باشد را بوجود می‌آورد.



(a)



(b)

شکل 4-4 دو نوع ترک (a) ترک کششی (b) ترک برشی



(a)



(b)

شکل 4-5 مدل عیوب (a) درخت کاجی (b) معکوس درخت کاجی

2-2-4 مدل‌های کیفی برای بیان الگوی لایه لایه شدن

دو مدل ساده برای توضیح لایه لایه شدن در لایه‌های در معرض بار موضعی در نظر گرفته شده است. دو مدل بر این واقعیت که لایه‌ها از چندین لایه ارتروپیک ساخته شده‌اند پایه ریزی شده‌اند و هر لایه به سمت خاصی تمایل به تغییر شکل دارد و هنگامی تنش‌های برشی و کششی داخل لایه‌ای در نقطه تماس بار به حداکثر مقدار خود رسید، لایه لایه شدن رخ می‌دهد. رفتار ارتروپیک هر لایه و استحکام خمشی نامناسب در لایه‌ها دلیل اصلی لایه لایه شدن می‌باشد.

liu (1988) مطالعه بر روی لایه لایه شدن صفحه دو لایه‌ای را شروع کرد و یک مدل برای بیان جهت و اندازه و شکل لایه لایه شدن ارائه داد که بر این فرض که لایه لایه شدن بخاطر لایه‌های بالایی و پایینی یک صفحه میانی که استحکام خمشی متفاوت دارند، رخ می‌دهد.

با فرض اینکه لایه لایه شدن بخاطر اختلاف در استحکام خمشی رخ می‌دهد. ضریب عدم تناسب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M = \frac{[D_{ij}(\theta_b) - D_{ij}(\theta_t)]}{[D_{ij}(0^\circ) - D_{ij}(90^\circ)]} \quad (4.1.2)$$

D_{ij} اعضای ماتریس استحکام خمشی D می‌باشد. که در هر لایه به طور جداگانه، $D_{ij}(\theta_b)$ استحکام لایه پایینی می‌باشد و حرف t مشخص کننده لایه بالایی است. هنگامی که ضریب عدم تناسب برای هر D_{ij} تعریف می‌شود معمولاً D_{11} را برای

تعیین ضریب عدم تناسب به کار می‌برند. برای صفحه دو لایه‌ای $M=1$ هنگامی است که زاویه بین الیاف 90° می‌باشد.

روش دیگر برای توضیح اینکه چرا دو لایه با جهت گیری مختلف هنگامی که در معرض بار قرار می‌گیرند دچار لایه لایه می‌شوند توسط لیسر و فیلیپو (1991) ارائه گردید. جابجایی عرضی یک صفحه مستطیلی تشکیل شده از یک لایه کامپوزیتی با زاویه الیاف صفر درجه که در معرض بار متمرکزی قرار دارد را می‌توان توسط راه حل ناویر بدست آورد.

در برخی از مسائل که الیاف در زوایای 90 درجه می‌باشند نیز از همین روش می‌توان حل کرد. هنگامی که دو لایه به یکدیگر متصل می‌باشند تنش‌های لایه‌های داخلی، لایه‌ها را در جهت تغییر شکل وادار می‌سازد و به هنگامی که این تنش‌ها به حد ماکزیمم خود رسید باعث لایه لایه شدن می‌شود.

3-4 روش‌های تجربی برای تخمین خسارت

تکنیک‌های بسیاری برای تعیین میزان خسارت وارده در سازه‌های کامپوزیتی به کار برده می‌شود. خسارت ضربه به صورت داخلی می‌باشد که شامل لایه لایه شدن و ترک ماتریسی و پاره شدن الیاف می‌باشد که ما از تکنیک‌های مخرب و غیرمخرب برای تخمین خسارت استفاده می‌کنیم و توسط تست‌های غیرمخرب محل خسارت دیده تعیین می‌گردد و بعد از تست‌های غیرمخرب تست‌های مخرب

اطلاعات بیشتری در مورد خسارت وارده برای ما فراهم می‌کند اما باید توجه کنیم که قطعه بعد از تست‌های مخرب قابل استفاده نمی‌باشد.

1-3-4 تست‌های غیر مخرب

روش‌هایی برای نشان دادن خسارت ضربه بر روی سازه لازم است که توسط این روش‌ها محل خسارت بر روی سازه تعیین می‌گردد. در ابتدا اندازه و شکل لایه لایه شدن و همچنین ترک ماتریس توسط چشم قابل مشاهده می‌باشد. محققان با به کار بردن روش‌های غیرمخرب در مورد خسارت ضربه به نوع و چگونگی شروع خسارت و ترک در سازه پی بردند و روش‌های غیرمخرب شامل تست التراسونیک و رادیوگرافی را برای تعیین خسارت‌های داخلی به کار برده می‌شود. در روش X-Ray یک تصویر از منطقه خسارت دیده گرفته می‌شود و مفسر با بررسی آن به نوع خسارت و محل دقیق خسارت پی می‌برد. فهمیدن اینکه چگونه لایه لایه شدن شروع می‌شود و همچنین نوع و جهت شکل‌گیری آن و همچنین چگونگی تبدیل آن به ترک بسیار مهم می‌باشد. این اطلاعات برای توسعه مدل‌های خسارت در طول ضربه بسیار مهم می‌باشند.

روش‌های غیرمخرب دیگری برای تعیین خسارت بر روی سازه وجود دارد ولی روش التراسونیک و X-Ray متداول‌ترین روش‌های غیرمخرب می‌باشند. در کاربرد واقعی تست‌های غیرمخرب باید محل کار برای افراد در دسترس باشد و همچنین

تجهیزات لازم و زمان کافی برای انجام تست باید در نظر گرفته شود. با برقراری جریان الکتریکی در فیبرهای گرافیتی می‌توان میدان الکتریکی موجود در آن را اندازه‌گیری کرد و فیبرهای خسارت دیده با ایجاد مزاحمت برای عبور جریان الکتریکی و تغییر اندازه میدان الکتریکی قابل شناسایی می‌باشند (1981 Rhodes etal) و روش جریان گردایی برای تعیین ترک به کار برده می‌شود.

4-3-2 تست‌های مخرب

جزئیات مربوط به خسارت ضربه در یک سازه با بازرسی در محل‌های مختلف منطقه‌ای که تحت اثر ضربه می‌باشد حاصل می‌گردد. آزمایشات میکروسکوپی در هر قسمت برای به دست آوردن جزئیات کامل در مورد لایه لایه شدن و ترک ماتریس در هر لایه انجام می‌گیرد.

در روش deply (levin 1988) یک محلول کلراید به همراه ایزوپروپیل برای نفوذ در مناطق خسارت دیده استفاده می‌شود اگر منطقه تحت ضربه برای نفوذ محلول مناسب نباشد. یک سوراخ به قطر 1mm بر روی لایه ایجاد می‌کنیم بعد از خشک شدن، یک لایه بر روی ترک‌های سطحی قرار می‌گیرد. سپس ماتریس راتا دمای 22°C حرارت می‌دهند و لایه‌ها را از یکدیگر جدا می‌کنند و لایه لایه شدن و ترک ماتریس را توسط میکروسکوپ مشاهده می‌نمایند.

نتیجه گیری کلی:

- 1- تئوری معرفی شده در بخش (2-3) و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نیروی ضربه و مدت زمان ضربه را تقریباً مشابه پیش بینی می کنند .
- 2- تئوری معرفی شده در بخش (2-3) در مقایسه با تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول ، پاسخ های بهتری برای جابجایی ورق در ناحیه تماس می دهد و دلیل آن هم این است که در تئوری ارائه شده تغییرات جابجایی ورق در راستای ضخامت در هر لایه خطی فرض شده است و در خارج از ناحیه تماس و همچنین بعد از جدا شدن گلوله از سطح هر دو تئوری ، جابجایی ها را تقریباً همانند هم پیش بینی می کنند .
- 3- تئوری معرفی شده در بخش (2-3) نشان می دهد که کرنش عرضی نرمال در ناحیه تماس و زمان تماس قابل صرف نظر کردن نیست و فرض صفر بودن این کرنش در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نامناسب می باشد
- 4- تئوری معرفی شده در بخش (2-3) ، تنش عرضی نرمال صفر، در نظر گرفته نشده است و این تنش قابل محاسبه بوده و مقدار آن در سطح ورق و در نقطه برخورد در مقایسه با تنش های نرمال در صفحه بزرگ می باشد . البته تئوری فوق الذکر تنش عرضی نرمال را به صورت کاملاً دقیق پیش بینی نمی کند و دلیل آن می تواند مربوط به فرض اولیه برای جابجایی ها در تئوری ارائه شده باشد . تغییرات مؤلفه های جابجایی v و u در راستای ضخامت مانند تئوری تغییرشکل برش مرتبه اول خطی در نظر گرفته شده است . جگونگی این تغییرات از نظر فیزیکی بیان کننده خمش ورق می باشد اگر تغییرات مؤلفه های جابجایی v و u مانند تغییرات مؤلفه عرضی جابجایی w جابجایی w در نظر گرفته می شدند احتمالاً جواب های مناسبتری به دست می آمد .
- 5- فرض توزیع نیرو به صورت هر تیزین ، در مقایسه با فرض توزیع نیرو به صورت نقطه ای پاسخ های مشابه ای برای نیروی ضربه ، جابجایی ها و کرنش ها نتیجه می دهد .

تئوری معرفی شده در بخش (2-3)، پاسخ ورق به بار ضربه را بهتر از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پیش بینی می کند. برای بررسی دقیق تر ضربه می توان از تئوری به مراتب قویتر از تئوری ارائه شده بعنوان تئوری جدید استفاده کرد. فرض اولیه در تئوری لایه ای به صورت زیر در نظر گرفته شود

$$U(x, y, z) = U_i(x, y, z)\phi_i(z)$$

$$V(x, y, z) = V_i(x, y, z)\phi_i(z)$$

$$W(x, y, z) = W_i(x, y, z)\phi_i(z)$$

فرض فوق الذکر به این معنی است که شکل تغییرات W و V و u در راستای ضخامت در هر لایه از درجه تابع چند جمله ای می باشد این تغییرات می توانند مانند آنچه در پروژه مورد بحث بررسی شده از نوع خطی باشد و یا از درجات بالاتر، پیشنهاد می شود که تغییرات خطی و تغییرات از درجه دوم بر حسب مختصه Z در راستای ضخامت برای جابجایی ها مورد بررسی قرار می گیرد.

تئوری کلاسیک ورق، سادهترین تئوری برای بررسی ضخامت بوده و بر این فرض بنا شده است که خطوطی که قبل از تغییر شکل صفحه، عمود بر سطح میانی ورق می باشند، بعد از اعمال بار همچنان مستقیم و عمود باقی می مانند و این بدان معناست که در این تئوری اثرات تغییر شکل برشی در نظر گرفته نمی شوند. در نتیجه استفاده از این تئوری در حل پارهای از مسائل، جواب دقیق بدست نمی دهد. در مواردی که اثرات تغییر شکل برشی مهم باشد باید از یک تئوری تغییر شکل برشی استفاده کرد.

در فرمولاسیون تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای ضخامت کامپوزیت لایه های، نکات زیر باید در نظر گرفته شود:

1- صفحه کامپوزیت لایه ای از تعداد دلخواهی لایه ارتوتروپ با جهت تارهای دلخواه تشکیل شده است که بوسیله باندهایی بهم متصل می باشد.

2- این باندها بینهایت نازک و غیر قابل تغییر شکل برشی می باشند یعنی در دو طرف مرز یک لایه، با لایه دیگر پیوسته بوده و هیچ لایه ای روی لایه دیگر نمی لغزد.

3- جابجایی ها نسبت به ضخامت ورق کوچک هستند.

اگر صفحه کامپوزیت لایه ای نازک باشند، خطوطی که قبل از تغییر شکل صفحه عمود بر صفحه میانی باشند، در پدیده کشش و خمش همچنان مستقیم باقی می ماند ولی لزوماً بر صفحه میانی عمود نیستند.

5- مؤلفه های جابجایی ورق در راستای عمود بر سطح، در ضخامت ورق ثابت است
6- ضخامت صفحه خیلی کوچکتر از طول و عرض صفحه بوده و می توان فرض کرد تنش نرمال عرضی صفر می باشد.

تئوری معرفی شده در بخش (3-2) نسبت تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول دارای دقت بیشتری است

وزمان مورد نیاز برای بدست آوردن پاسخ کوتاهتر از زمان لازم در تئوری لایه ای می باشد در تئوری جدید، فرض این است که تغییرات مؤلفه ها در صفحه جابجایی، مانند تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، در راستای عمود بر سطح ورق و در ضخامت ورق به صورت خطی باشد. با فرض اینکه تغییرات مؤلفه عرضی جابجایی، مانند تئوری لایه ای در راستای

عمود بر سطح و در ضخامت ورق، در هر لایه فیزیکی یا ریاضی بصورت خطی باشد در این صورت کرنش عرضی نرمال صفر بوده و نیز تنش های عرضی برشی در راستای عمود بر سطح و در ضخامت ورق ثابت نخواهد بود.

لازم به ذکر است که از این تئوری هم برای تحلیل ورق های ایزوتروپ و هم ورق های کامپوزیت می توان استفاده نمود.

در فرض اولیه جابجائی هادراین تئوری نیز، نوع ماده کاررفته در ورق و این که ورق ایزوتروپ است یا کامپوزیت

مطرح نمی باشد و معادلات حرکت ورق در حالت کلی با استفاده اصل هامیلتون بدست آمده اند و بسته به این که ورق ایزوتروپ است یا کامپوزیت می توان معادلات حرکت را بر حسب ضرایب موجود در روابط بین مؤلفه های تنش و کرنش ساده کرد و باز نویسی نمود.

به طور کلی هرچه تئوری تغییر شکل برشی از مرتبه بالاتری باشد، جوابهای دقیقتری ارائه می کند ولی به دلیل پیچیدگی تئوری ارائه شده در بخش (5-2) از آن به طور گسترده استفاده نمی شود. و با وجود دقت پایین تر تئوری کلاسیک

و تغییر شکل برشی مرتبه اول، به دلیل سادگی، کاربرد بیشتری دارد

در فصل سوم و چهارم، چهار روش برای مطالعه دینامیک ضربه مشاهده شد 1- روش جرم-فنر 2- روش بالانس انرژی 3- روش کامل 4- روش مدل تقریبی برای ضربه با موج کنترل شده.

مدل کامل شرح حالی از حالت دینامیک ساختار، دینامیک پرتابه و موقعیت فرورفتگی در منطقه تماس می باشد که به تعداد مدهای پاسخ خصوصی و هندسه جسم هدف و شرایط مرزی وابسته است. راه حل های عددی معمولاً از نظر فهمیدن مسئله سختتر از راه حل های تئوری هستند و مدل جرم-فنر بر پایه برخی از فرضیات قرار دارد که دینامیک صفحه را توسط یک سیستم یک درجه آزادی با جرم و سختی متناسب بیان می گردد و در مدل های انرژی-بالانس، صفحه با فرض رفتار نیمه استاتیکی تغییر شکل می یابد و ماکزیمم نیروی تماسی در هنگامی که بیشترین تغییر شکل در صفحه ایجاد می شود، رخ می دهد و در این هنگام انرژی جنبشی پرتابه و صفحه صفر می شود و در مدل چهارم که دینامیک ضربه بر روی جواب تحلیلی ساده شده بر روی صفحه ارتوروپیک بیان می شود. در این روش صفحه باید به اندازه کافی طویل باشد بطوریکه تغییر شکل لایه ها ناچیز باشد که به آن ضربه با موج کنترل شونده اطلاق می شود که در روش السون جواب مسئله به معادلات دیفرانسیلی غیر خطی با متغیر λ ساده می شود که متغیر λ نوع و چگونگی نیروی تماس را بیان می کند.

انواع مختلفی از تست های ضربه پیشنهاد شده است ولی تست وزنه و تفنگ بادی دارای کاربرد وسیعتری می باشند از طریق تست های ضربه اطلاعات جامعی در مورد خسارتهای ضربه بدست آمده است. خسارتهای ضربه شامل ترک ماتریس، لایه لایه شدن، شکست تارها و غیره می باشد. ترک های ماتریس منجر به لایه لایه شدن در بین لایه های می شود که دارای تارهایی با جهت گیریهای مختلف است و لایه لایه شدن در بین لایه ها با تارهای هم جهت رخ نمی دهد.

بعد از مقدار آستانی، سطح خسارت دیده بطور خطی نسبت به انرژی جنبشی پر تا به افزایش می یابد بسیاری از تکنیکهای تجربی برای نشان دادن منطقه خسارت دیده پیشنهاد شده است که تکنیکهای التراسنیک و X-ray بیشترین کاربرد را دارند. نتایج حاصل از آزمایشات تجربی بروی مدلهای ضربه و تستهای ضربه ما را در ساخت ساختار کامپوزیت مقاوم در برابر ضربه یاری می رساند.

توضیحاتی پیرامون نمودارها

شکل (1-5) نشان دهنده تنش های نرمال سطوح بالاوپایین ورق در وسط صفحه می باشد. همان گونه که مشاهده می شود، تنش عرضی نرمال در بالای صفحه مقدار قابل توجهی دارد. ولی در سطح زیرین صفحه مقدارش تقریباً صفر است اشکال (2-5) الی (4-5)

ورق تحت بار ضربه در قالب تئوری طرح جدید مورد بررسی قرار گرفته و با فرض توزیع بار به صورت هرتزین، نتایج عددی به صورت نمودارهایی با استفاده از روابط قبلی در اشکال (2-5) الی (4-5) ترسیم گردیده است. شکل (6-5) و (5-5) نیز پاسخ ورق به بار ضربه در قالب دو تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری ارائه شده در بخش (3-2) را نمایش می دهد.